

Оценочные материалы для промежуточной аттестации по дисциплине

Дифференциальная геометрия

Код, направление подготовки	01.03.02, Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль)	Прикладная математика и информатика
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Прикладная математика
Выпускающая кафедра	Прикладная математика

Типовые задания для контрольной работы:

1. Найдите неявные уравнения кривой $x = \sin 2t$, $y = 1 - \cos 2t$, $z = 2\cos t$, $t \in [0, \pi]$.
2. Вычислить длину дуги кривой $x^3 = 3a^2y$, $2xz = a^2$, заключенной между плоскостями $y = \frac{a}{3}$ и $y = 9a$.
3. Показать, что кривая: $x = 1 + 3t + 2t^2$, $y = 2 - 2t + 5t^2$, $z = 1 - t^2$ плоская, и найти уравнение плоскости, в которой она расположена.
4. Найти координаты векторов, сопровождающего репера линий, заданных параметрически в указанной точке:

а) $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3$, $t \in (-\infty, \infty)$ в точке $t = 1$;

б) $x = t \sin t$, $y = t \cos t$, $z = te^t$, $t \in (-\infty, \infty)$ в начале координат;

в) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in (-\infty, \infty)$, $a, b = \text{const}$, $a > 0$ в ее произвольной точке;

г) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \cos \frac{t}{2}$, $t \in (-\infty, \infty)$, $a = \text{const}$, в ее произвольной точке.

Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной параметрическими уравнениями в указанной точке:

а) $x = 2u - v, y = u^2 + v^2, z = u^3 - v^3, u \in (-\infty, \infty), v \in (-\infty, \infty)$ в точке $(-1, 1, -1)$;

б) $x = u + v, y = u^2 - 2v, z = u^3 - uv, u \in (-\infty, \infty), v \in (-\infty, \infty)$ в точке $u = 1, v = 2$;

в) $x = \cos u \cos v, y = \cos u \sin v, z = \sin u, u \in [0, 2\pi), v \in [0, 2\pi)$ в точке $u = 0, v = \frac{\pi}{3}$;

г) $x = au, y = \sin u, z = bv, u \in (-\infty, \infty), v \in (-\infty, \infty) a \neq 0, b \neq 0$ в произвольной точке;

д) $x = (7 + 5 \cos u) \cos v, y = (7 + 5 \cos u) \sin v, z = 5 \sin u, u, v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
в точке $\cos u = \frac{3}{5}, \cos v = \frac{4}{5}$.

Вычислить первую квадратичную форму следующих поверхностей, заданных параметрическими уравнениями:

а) прямой геликоид: $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av, u > 0, v \in (-\infty, \infty), a \neq 0$;

б) тор: $x = (a + b \cos u) \cos v, y = (a + b \cos u) \sin v, z = b \sin u, u \in [0, 2\pi), v \in [0, 2\pi), a, b > 0$;

в) поверхность вращения: $x = v \cos u, y = v \sin u, z = f(v), u \in [0, 2\pi), v > 0$;

г) псевдосфера: $x = a \sin u \cos v, y = a \sin u \sin v, z = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right), u \in [0, \pi), v \in [0, 2\pi)$;

д) катеноид: $x = a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, y = a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, z = u, u \in (-\infty, \infty), v \in [0, 2\pi)$;

е) геликоид общего вида: $x = u \cos v, y = u \sin v, z = f(u) + av, u > 0, v \in [0, 2\pi), a \neq 0$;

ж) поверхность вращения с осью OZ : $x = \varphi(u) \cos v, y = \varphi(u) \sin v, z = f(u), v \in [0, 2\pi)$.

Найти нормальную кривизну координатных линий на заданных поверхностях:

а) геликоид: $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av, u > 0, v \in [0, 2\pi), a \neq 0$;

б) сфера: $x = r \cos v \cos u, y = r \sin v \cos u, z = r \sin u, u \in [0, 2\pi), v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

в) катеноид: $x = \sqrt{a^2 + u^2} \cos v, y = \sqrt{a^2 + u^2} \sin v, z = a \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}), u > 0, v \in [0, 2\pi)$;

г) поверхность вращения: $x = e^{-\frac{u^2}{2}} \cos v, y = e^{-\frac{u^2}{2}} \sin v, z = u, u \in (-\infty, \infty), v \in [0, 2\pi)$.

Вычислить главные кривизны поверхности в точке:

**а) поверхность: $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$, $u \in (-\infty, \infty)$, $v \in (-\infty, \infty)$,
точка $u = 1$, $v = 1$;**

б) поверхность: $z = xy$, точка $(1, 1, 1)$.

Типовые вопросы к экзамену:

1. Векторные функции
2. Понятие векторной функции.
3. Предел и непрерывность.
4. Дифференциал и производные векторных функций.
5. Понятие кривой.
6. Параметризованные кривые.
7. Длина дуги и натуральный параметр кривой.
8. Касательная прямая кривой.
9. Плоские кривые
10. Неявное и приведенное уравнения плоской кривой.
11. Касательная и нормаль.
12. Особые точки плоской кривой.
13. Кривизна плоской кривой
14. Сопровождающий репер кривой.
15. Формулы Френе и кривизна плоской кривой.
16. Геометрический смысл кривизны.
17. Уравнения пространственной кривой.
18. Касательная прямая и соприкасающаяся плоскость.
19. Сопровождающий репер
20. Формулы Френе.
21. Кривизна и кручение. Геометрический смысл кривизны и кручения
22. Понятие поверхности.
23. Параметрическое, неявное и приведенное уравнения.
24. Координатная сеть и натуральный репер.
25. Касательная плоскость и нормаль поверхности.
26. Первая квадратичная форма поверхности
27. Длина кривой на поверхности.
28. Угол между кривыми.
29. Площадь области на поверхности.
30. Отображение поверхностей и его дифференциал.
31. Понятие о внутренней геометрии поверхности.
32. Вторая квадратичная форма поверхности.
33. Нормальная кривизна.
34. Главные направления и главные кривизны поверхности.
35. Средняя и гауссова кривизны.
36. Формула Эйлера.
37. Теорема Гаусса.