

Оценочные материалы для промежуточной аттестации по дисциплине

Математический анализ

Код, направление подготовки	01.03.02, Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль)	Прикладная математика и информатика
Форма обучения	Очная
Кафедра-разработчик	Кафедра прикладной математики
Выпускающая кафедра	Кафедра прикладной математики

1 семестр.

Типовые задания для контрольной работы:

Вариант 1

1. Найти предел:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^x$$
2. Найти производную третьего порядка для функции:
$$y = (x^2 + 1)\operatorname{arctg}x$$
3. Провести исследование функции и построить эскиз графика функции:
$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

Вариант 2

1. Найти предел:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+5} \right)^{2x}$$
2. Написать разложение по формуле Тейлора в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$ до членов третьего порядка включительно следующей функции:
$$y = \ln(\sin x)$$
3. Провести исследование функции и построить эскиз графика функции:
$$y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Вариант 3

1. Найти предел:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{3x^2}$$

2. Написать разложение по формуле Тейлора в точке $x_0 = 0$ до членов третьего порядка включительно следующей функции:

$$y = \cos(\cos x)$$

3. Провести исследование функции и построить эскиз графика функции:

$$y = \frac{x^2}{1-x^2}$$

Типовые вопросы к экзамену:

1. Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел суммы бесконечно малых. Произведение бесконечно малой и ограниченной величин.
2. Арифметические действия над сходящимися последовательностями: предел суммы, произведения, частного. Критерий Коши сходимости последовательности.
3. Свойства сходящейся последовательности. Предельный переход в равенстве и неравенстве. Лемма о вложенных промежутках.
4. Определение предела функции по Коши и по Гейне. Односторонние пределы.
5. Предел монотонной функции. Частичные пределы. Лемма Больцано-Вейерштрасса. Первый и второй замечательные пределы.
6. Определение непрерывной функции. Непрерывность слева и справа. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции. Классификация разрывов.
7. Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении. Существование и непрерывность обратной функции для непрерывной функции. Теорема Вейерштрасса.
8. Определение производной. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной. Производные элементарных функций.
9. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Правила вычисления производных: умножение на константу, сумма, произведение, частное.
10. Дифференциал. Свойства дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы первого дифференциала.
11. Теорема Ферма. Теоремы Лагранжа и Ролля. Правило Лопиталя.
12. Формула Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора. Формулы Тейлора для элементарных функций.
13. Условия монотонности дифференцируемой функции. Необходимые и достаточные условия минимума и максимума. Асимптоты. Исследование функции и построение графика.

2 семестр.

Типовые задания для контрольной работы:

Вариант 1

1. Найти интеграл:

$$\int_1^e \frac{\cos(\ln x) dx}{x}$$

2. Найти интеграл:

$$\int x e^{2x} dx$$

3. Найти интеграл: $\int \frac{(x+2)dx}{x^2-3x+2}$

Вариант 2

1. Найти интеграл:

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x^2} dx}{x^3}$$

2. Найти интеграл:

$$\int x^2 \ln x dx$$

3. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$$

Вариант 3

1. Найти интеграл:

$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln 2x - 3}{x} dx$$

2. Найти интеграл:

$$\int \cos^3 x \sin x dx$$

3. Найти интеграл:

$$\int \frac{x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx$$

Типовые вопросы к экзамену:

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Табличные интегралы.
2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.
3. Интегрирование рациональных функций.
4. Интегрирование иррациональных функций. Подстановки Эйлера. Интеграл от дифференциального бинома.
5. Определенный интеграл. Свойства определенного интеграла.
6. Верхняя и нижняя сумма Дарбу. Необходимое и достаточное условие интегрируемости. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.
7. Определенный интеграл с переменных верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.
8. Определение площади открытых множеств. Вычисление площадей. Вычисление объема тел вращения.
9. Понятие параметрически заданной кривой. Вычисление длины кривой. Вычисление площади поверхности вращения.
10. Несобственный интеграл. Свойства несобственного интеграла. Несобственные интегралы от неотрицательных функций.

3 семестр.

Типовые задания для контрольной работы:

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$
2. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$
3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)3^n}$
4. Определить интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала $1 + \frac{(x+3)}{3 \cdot 2} + \frac{(x+3)^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{(x+3)^3}{3^3 \cdot 4} + \dots$
5. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos^2 3x$. Указать область сходимости полученного ряда.
6. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом 2π) функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
7. Найти полную производную $\frac{dz}{dt}$ функции $z = \arcsin \sqrt{x^2 + y^2}$, где $\begin{cases} x = \sin^2 4t \\ y = \ln(\cos 4t) \end{cases}$
8. Найти все частные производные второго порядка и полный дифференциал второго порядка функции $z = x \ln(xy)$
9. Найти производную функции $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M(1,1,1)$ по направлению:
 - a. К точке $N(1,5,4)$.
 - b. Градиента функции в точке M .
10. Исследовать функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ на экстремум.

Типовые вопросы к экзамену:

1. Определение и геометрическая интерпретация функции нескольких переменных.
2. Предел и непрерывность функции двух переменных.
3. Частные производные функции нескольких переменных.
4. Дифференцируемость функции двух переменных. Необходимые условия дифференцируемости функции двух переменных.
5. Дифференцируемость функции двух переменных. Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных.
6. Частные производные сложной функции. Полная производная и полный дифференциал сложных функций. Производная функции, заданной неявно.
7. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
8. Производная по направлению. Градиент.
9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
10. Экстремумы функции двух переменных. Необходимое условие экстремума.
11. Экстремумы функции двух переменных. Достаточное условие экстремума.
12. Условный экстремум.
13. Понятие числового ряда, его сходимости. Свойства сходящихся рядов.
14. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд.
15. Признак сравнения сходимости числового ряда с неотрицательными членами.
16. Признак Даламбера сходимости числового ряда с неотрицательными членами.

17. Интегральный признак сходимости числового ряда с неотрицательными членами.
18. Второй признак сравнения, признак Коши сходимости числового ряда с неотрицательными членами.
19. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов.
20. Степенные ряды. Теорема Абеля.
21. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда. Теорема о вычислении радиуса сходимости степенного ряда. Интервал сходимости степенного ряда.
22. Свойства степенных рядов.
23. Ряды Маклорена и Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа.
24. Разложение некоторых элементарных функций в степенные ряды.
25. Тригонометрические ряды Фурье.
26. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.
27. Ряд Фурье для функции с периодом $2l$.

4 семестр.

Типовые задания для контрольной работы:

1. Изменить порядок интегрирования $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.
2. Перейти к полярным координатам и вычислить $\iint_{(D)} \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}$, где (D) :
полуокружность $y = \sqrt{1-x^2}$ и $y=0$
3. Вычислить координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y=0$, $x=4$.
4. Вычислить $\iiint_{(V)} z dx dy dz$, где (V) ограничена конической поверхностью $x^2 + y^2 = z^2$ и плоскостью $z=2$.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{ABC} (x^2 - y^2) dx + xy dy$, где ABC - ломаная, соединяющая точки $A(1,1)$, $B(3,4)$, $C(5,4)$.
6. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint_C 2(x^2 + y^2) dx + (x+y)^2 dy$, где C - контур треугольника с вершинами $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$, пробегаемый против хода часовой стрелки.
7. Найти $\operatorname{div}(\bar{u} \times \bar{v})$, где $\bar{u} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{v} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$.
8. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F} = (x+y)\bar{i} + (x-z)\bar{j} + (y+z)\bar{k}$ по контуру треугольника с вершинами в точках $A(0,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

Типовые вопросы к экзамену:

1. Определение, геометрический смысл, свойства двойного интеграла. Обобщенное условие интегрируемости функции.

2. Сведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной и криволинейной области. Сведение двойного интеграла к повторному в случае области, заданной в полярных координатах.
3. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан функции. Преобразование к полярным координатам.
4. Геометрические и физические приложения двойных интегралов.
5. Определение, свойства тройного интеграла. Обобщенное условие интегрируемости функции.
6. Вычисление тройного интеграла.
7. Замена переменных в тройном интеграле. Якобиан функции.
8. Преобразование к цилиндрическим координатам. Преобразование к сферическим координатам.
9. Геометрические и физические приложения тройных интегралов.
10. Кусочно – гладкие кривые. Определение и свойства криволинейного интеграла 1 рода. Геометрический и физический смысл криволинейного интеграла 1 рода.
11. Сведение криволинейного интеграла 1 рода к определенному. Вычисление криволинейных интегралов 1 рода для различных типов задания функций.
12. Определение, свойства, физический смысл криволинейного интеграла 2 рода.
 1. Вычисление криволинейных интегралов 2 рода для различных типов задания функций. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру.
 2. Связь между криволинейными интегралами 1 и 2 рода.
 3. Формула Грина.
 4. Определение односвязной области. Теорема об условии равенства нулю криволинейного интеграла по замкнутому контуру. Теорема об условиях независимости криволинейного интеграла от контура интегрирования.
 5. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов.
 6. Кусочно-гладкие поверхности. Определение и свойства поверхностного интеграла 1 рода. Вычисление поверхностного интеграла 1 рода.
 7. Двусторонние поверхности. Выбор стороны поверхности. Положительное направление обхода контура. Определение и свойства поверхностного интеграла 2 рода.
 8. Вычисление поверхностного интеграла 2 рода.
 9. Связь между поверхностными интегралами 1 и 2 рода.
 10. Геометрические и физические приложения поверхностных интегралов.
 11. Формула Стокса.
 12. Формула Остроградского.
 13. Определение скалярного и векторного полей.
 14. Градиент. Потенциальные поля.
 15. Задача о работе силы.
 16. Задача о потоке векторного поля.
 17. Дивергенция векторного поля.
 18. Циркуляция векторного поля.
 19. Ротор векторного поля.
 20. Потенциальное поле. Условия потенциальности.
 21. Соленоидальные векторные поля.
 22. Операторы Гамильтона и Лапласа. Основные формулы.