

Оценочные материалы для текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Математический анализ

Код, направление подготовки	01.03.02 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Направленность (профиль)	Технологии программирования и анализ данных
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Кафедра прикладной математики
Выпускающая кафедра	Кафедра прикладной математики

1-й семестр

Типовые задания для контрольной работы:

Вариант 1

1. Найти предел:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^x$$
2. Найти производную третьего порядка для функции:
$$y = (x^2 + 1)\arctg x$$
3. Провести исследование функции и построить эскиз графика функции:
$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

Вариант 2

1. Найти предел:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+5} \right)^{2x}$$
2. Найти вторую производную функции: $f(x) = e^x \sqrt{x+1}$
3. Провести исследование функции и построить эскиз графика функции:
$$y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Вариант 3

1. Найти предел:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{3x^2}$$
2. Найти вторую производную функции: $f(x) = (x+1)\cos(5x+2)$
3. Провести исследование функции и построить эскиз графика функции:

$$y = \frac{x^2}{1-x^2}$$

Типовые вопросы к экзамену:

1. Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел суммы бесконечно малых. Произведение бесконечно малой и ограниченной величин.
2. Арифметические действия над сходящимися последовательностями: предел суммы, произведения, частного. Критерий Коши сходимости последовательности.
3. Свойства сходящейся последовательности. Предельный переход в равенстве и неравенстве. Лемма о вложенных промежутках.
4. Определение предела функции по Коши и по Гейне. Односторонние пределы.
5. Предел монотонной функции. Частичные пределы. Лемма Больцано-Вейерштрасса. Первый и второй замечательные пределы.
6. Определение непрерывной функции. Непрерывность слева и справа. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции. Классификация разрывов.
7. Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении. Существование и непрерывность обратной функции для непрерывной функции. Теорема Вейерштрасса.
8. Определение производной. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной. Производные элементарных функций.
9. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Правила вычисления производных: умножение на константу, сумма, произведение, частное.
10. Дифференциал. Свойства дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы первого дифференциала.
11. Теорема Ферма. Теоремы Лагранжа и Ролля. Правило Лопиталя.
12. Формула Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора. Формулы Тейлора для элементарных функций.
13. Условия монотонности дифференцируемой функции. Необходимые и достаточные условия минимума и максимума. Асимптоты. Исследование функции и построение графика.
14. Первообразная и неопределенный интеграл. Табличные интегралы.
15. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.
16. Интегрирование рациональных функций.
17. Интегрирование иррациональных функций. Подстановки Эйлера. Интеграл от дифференциального бинома.
18. Определенный интеграл. Свойства определенного интеграла.
19. Верхняя и нижняя сумма Дарбу. Необходимое и достаточное условие интегрируемости. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.
20. Определенный интеграл с переменных верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.
21. Определение площади открытых множеств. Вычисление площадей. Вычисление объема тел вращения.
22. Понятие параметрически заданной кривой. Вычисление длины кривой. Вычисление площади поверхности вращения.
23. Несобственный интеграл. Свойства несобственного интеграла. Несобственные интегралы от неотрицательных функций.

2-й семестр

Типовые задания для контрольной работы:

Вариант 1

1. Найти частные производные второго порядка функции:

$$f = \frac{y}{x - y}$$

2. Найти точки экстремума функции:

$$u = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x$$

3. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{9}y^2}^y f dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{1}{9}y^2}^1 f dx.$$

Вариант 2

1. Найти частные производные второго порядка функции:

$$f = y^2(1 + e^x)$$

2. Найти точки экстремума функции:

$$u = x\sqrt{1 + y} + y\sqrt{1 + x}$$

3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D y^2 dx dy, \text{ область } D \text{ ограничена параболой } x = y^2 \text{ и прямой } y = x - 2.$$

Вариант 3

1. Найти частные производные второго порядка функции:

$$f = y \sin(y/x)$$

2. Найти точки экстремума функции:

$$u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$$

3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x + y)^2}, \quad D = [3, 4] \times [1, 2].$$

Типовые вопросы к экзамену:

1. n -мерное арифметическое пространство и его свойства. Предел последовательности. Открытые и замкнутые множества. Непрерывность функции нескольких переменных.
2. Частные производные и дифференциал функции нескольких переменных.
3. Градиент. Производная по направлению.
4. Старшие производные и дифференциалы. Формула Тейлора.
5. Исследование функции многих переменных на экстремум. Необходимые и достаточные условия экстремума. Условный экстремум.
6. Неявные функции. Неявные функции, заданные системой уравнений.
7. Определение и свойства меры Жордана.
8. Определение и свойства кратного интеграла. Сведение кратного интеграла к повторному.

9. Отображения областей. Якобиан отображения области. Замена переменных в кратном интеграле. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат.
10. Определение и свойства непрерывных кривых. Производная вектор-функции. Длина кривой.
11. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Формула Грина.
12. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.
13. Определение поверхности. Ориентация и площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго рода.
14. Векторные поля. Дивергенция. Ротор.
15. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского.
16. Потенциальное поле. Условия потенциальности. Соленоидальные векторные поля.

3-й семестр

Типовые задания для контрольной работы:

Вариант 1

1. Исследовать на сходимость ряд с общим членом: $a_n = \frac{(2n+3)!}{(3n-5)3^n}$
2. Исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость: $a_n = \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$
3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos^2 3x$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вариант 2

1. Исследовать на сходимость ряд с общим членом: $a_n = \frac{(3n-1)!}{(2n+1)2^n}$
2. Исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость:

$$a_n = (-1)^n \frac{n^2 + 1}{(n^2 - 1)n}$$
3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = 3^{x^2}$. Указать область сходимости полученного ряда.

Вариант 3

1. Исследовать на сходимость ряд с общим членом: $a_n = \frac{(n+1)5^n}{(4n+1)!}$
2. Найти радиус сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 5} \right)^{n^3} (x - 1)^n$$
3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$. Указать область сходимости полученного ряда.

Типовые вопросы к экзамену:

1. Понятие числового ряда, его сходимости. Свойства сходящихся рядов.
2. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд. Обобщенный гармонический ряд.
3. Признак сравнения сходимости числового ряда с неотрицательными членами.
4. Признак Даламбера сходимости числового ряда с неотрицательными членами.
5. Интегральный признак сходимости числового ряда с неотрицательными членами.
6. Признак Коши сходимости числового ряда с неотрицательными членами.
7. Критерий Коши сходимости произвольных рядов. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.
8. Абсолютно сходящиеся ряды. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана.
9. Степенные ряды. Теорема Абеля.
10. Теорема о радиусе сходимости степенного ряда. Теорема о вычислении радиуса сходимости степенного ряда. Интервал сходимости степенного ряда.
11. Свойства степенных рядов.
12. Ряды Маклорена и Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа.
13. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды.
14. Тригонометрические ряды Фурье. Сходимость рядов Фурье.
15. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.
16. Ряд Фурье для функции с периодом $2l$.
17. Общий ряд Фурье. Ортогональные системы, полнота и замкнутость.
18. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье, формула обращения, свойства преобразования Фурье.