Бюджетное учреждение высшего образования
Ханты-Мансийского автономного округа-Югры
"Сургутский государственный университет"

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УМР
_______________ Е.В. Коновалова
20 июня 2019 г., протокол УС №6

МОДУЛЬ "МАТЕМАТИКА"
Интегральные уравнения и вариационное исчисление

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **Экспериментальной физики**

Учебный план b030302-ЦифрТех-19-1.plx
03.03.02 ФИЗИКА
Направленность (профиль): Цифровые технологии в геофизике

Квалификация **Бакалавр**

Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **2 ЗЕТ**

Часов по учебному плану 72
в том числе:
аудиторные занятия 32
самостоятельная работа 40

Виды контроля в семестрах:
зачеты 5

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	5 (3.1)		Итого	
Недель	17,3			
Вид занятий	УП	РПД	УП	РПД
Лекции	16	16	16	16
Практические	16	16	16	16
Итого ауд.	32	32	32	32
Контактная работа	32	32	32	32
Сам. работа	40	40	40	40
Итого	72	72	72	72

Программу составил(и):

к.ф.-м.н., доцент, Лебедев С.Л.

Рабочая программа дисциплины

Интегральные уравнения и вариационное исчисление

разработана в соответствии с ФГОС:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 03.03.02 (уровень бакалавриата) (приказ Минобрнауки России от 07.08.2014г. №937)

составлена на основании учебного плана:

03.03.02 ФИЗИКА
Направленность (профиль): Цифровые технологии в геофизике
утвержденного учёным советом вуза от 20 июня 2019 г., протокол УС №6

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры

Экспериментальной физики

Протокол от 17 05 2019 г. № 03/76
Срок действия программы: уч.г.
Зав. кафедрой проф. Ельников А.В.

Председатель УМС к.т.н, доцент Тараканов Д.В.
07 06 2019 г. № 06/19

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	Сформировать представление о метрических функциональных пространствах и методах теории операторов; познакомить с методами решения простейших интегральных уравнений; развить навыки постановки и решения типовых задач вариационного исчисления, познакомить с приложениями вариационного исчисления к физическим задачам.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.Б.04
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	
2.1.2	Дифференциальные уравнения
2.1.3	Теория функций комплексного переменного
2.1.4	Модуль "Математика"
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Модуль "Теоретическая физика"

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
ОК-6: способностью работать в коллективе, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия
ОК-7: способностью к самоорганизации и самообразованию
ОПК-2: способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	- примеры физических систем, описываемых интегральными уравнениями;
3.1.2	- базовые понятия функционального анализа (метрические пространства, банаховы и гильбертовы пространства, линейные ограниченные операторы и т.д.), а также конкретные примеры функциональных пространств и линейных операторов;
3.1.3	- формулировки основных теорем в теории ограниченных операторов в банаховых пространствах;
3.1.4	- классификацию видов интегральных уравнений, содержание теорем Фредгольма;
3.1.5	- основные типы задач в вариационном исчислении, примеры применения вариационных принципов в механике, статике, электродинамике;
3.1.6	-основные правила работы творческого коллектива в условиях конфессиональных и культурных различий;
3.2	**Уметь:**
3.2.1	- самостоятельно находить необходимую информацию или ссылки на сертифицированные издания по вопросам интегральных уравнений и вариационного исчисления;
3.2.2	- осуществлять поиск необходимой информации и еѐ хранение в каталогизированной форме;
3.2.3	- пользоваться учебной и научной литературой для профессиональной деятельности;
3.2.4	- использовать определения основных понятий теории функциональных пространств и теории операторов, логически правильно выстраивать доказательства теорем;
3.2.5	- решать простейшие интегральные уравнения, находить приближённые решения и оценки степени приближения к точным решениям;
3.2.6	- правильно ставить вариационные задачи с учётом граничных условий и/или связей, получать определяющие экстремум дифференциальные уравнения, а также условия сопряжения в точках разрыва;
3.2.7	- вести дискуссию, толерантно воспринимая этнические, личностные и другие особенности окружающих.
3.3	**Владеть:**
3.3.1	- методами нахождения решений интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерры в том числе –
3.3.2	- методами сведения интегральных уравнений Вольтерры к ОДУ;
3.3.3	- методом преобразования Лапласа для интегральных уравнений типа свёртки;
3.3.4	- методом неопределённых множителей Лагранжа, методом Лежандра.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)							
Код занятия	**Наименование разделов и тем /вид занятия/**	**Семестр / Курс**	**Часов**	**Компетен-ции**	**Литература**	**Инте ракт.**	**Примечание**
	Раздел 1. Функциональные пространства (метрические, линейные, банаховы, гильбертовы).						
1.1	Функциональные пространства (метрические, линейные, банаховы, гильбертовы)/Лек/	5	3	ОК-6 ОК-7	Л1.2 Л1.4Л2.2Л3.1 Л3.2 Л3.3 Э1 Э2	0	
1.2	Функциональные пространства (метрические, линейные, банаховы, гильбертовы /Пр/	5	3	ОК-6 ОПК-2	Л1.3 Э1 Э2	0	Решение задач
1.3	Изучение литературы по теме лекции /Ср/	5	7	ОК-7 ОПК-2	Л1.3 Э1 Э2	0	Контрольная работа
	Раздел 2. Основы теории операторов в банаховых пространствах.						
2.1	Основы теории операторов в банаховых пространствах./Лек/	5	3	ОК-6 ОК-7	Л1.1 Л1.2 Э2	0	
2.2	Основы теории операторов в банаховых пространствах./Пр/	5	3	ОК-6 ОПК-2	Л1.3 Э2	0	Контрольная работа
2.3	Основы теории операторов в банаховых пространствах./Ср/	5	7	ОК-7 ОПК-2	Э2	0	
	Раздел 3. Основные типы интегральных уравнений. Теоремы Фредгольма Резольвента интегрального оператора.						
3.1	Основные типы интегральных уравнений. Теоремы Фредгольма Резольвента интегрального оператора /Лек/	5	3	ОК-6 ОК-7	Л1.2Л3.2 Э2	0	
3.2	Основные типы интегральных уравнений. Теоремы Фредгольма Резольвента интегрального оператора /Пр/	5	3	ОК-6 ОПК-2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Э2	0	Контрольная работа
3.3	Основные типы интегральных уравнений. Теоремы Фредгольма Резольвента интегрального оператора /Ср/	5	6	ОК-7 ОПК-2		0	Решение задач
	Раздел 4. Специальные методы решений интегральных уравнений						
4.1	Специальные методы решений интегральных уравнений /Лек/	5	3	ОК-6 ОК-7	Л1.1 Л1.2Л3.2	0	
4.2	Специальные методы решений интегральных уравнений /Пр/	5	3	ОК-6 ОК-7 ОПК-2	Л1.1 Л1.2Л3.2	0	Контрольная работа
4.3	Специальные методы решений интегральных уравнений /Ср/	5	7	ОК-6 ОК-7	Л1.3	0	Решение задач
	Раздел 5. Классические задачи вариационного исчисления для систем с одной степенью свободы						

5.1	Классические задачи вариационного исчисления для систем с одной степенью свободы /Лек/	5	3	ОК-6 ОК-7	Л1.1Л3.2	0	
5.2	Классические задачи вариационного исчисления для систем с одной степенью свободы /Пр/	5	3	ОК-6 ОК-7 ОПК-2	Л1.1Л2.1	0	Контрольная работа
5.3	Классические задачи вариационного исчисления для систем с одной степенью свободы /Ср/	5	9	ОК-7 ОПК-2		0	Решение задач
	Раздел 6. Условный экстремум и вариационные принципы в системах с несколькими степенями						
6.1	Условный экстремум и вариационные принципы в системах с несколькими степенями свободы /Лек/	5	1	ОК-6 ОК-7	Л1.1Л2.1Л3.2 Э1	0	
6.2	Условный экстремум и вариационные принципы в системах с несколькими степенями свободы /Пр/	5	1	ОК-6 ОК-7 ОПК-2	Л1.1Л2.1	0	Контрольная работа
6.3	Условный экстремум и вариационные принципы в системах с несколькими степенями свободы /Ср/	5	4	ОК-7 ОПК-2		0	Решение задач

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

См. Приложение №1

5.2. Темы письменных работ

См. Приложение №1

5.3. Фонд оценочных средств

См. Приложение №1

5.4. Перечень видов оценочных средств

письменный опрос
зачет
контрольная работа

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Колич-во
Л1.1	Гюнтер Н. М.	Курс вариационного исчисления: учебник	СПб. [и др.]: Лань, 2009	10
Л1.2	Васильева А. Б., Тихонов Н. А.	Интегральные уравнения: учебник	СПб. [и др.]: Лань, 2009	10
Л1.3	Абдрахманов В. Г., Рабчук А. В.	Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания: учеб. пособие	Москва: Лань", 2014, http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=45675	1
Л1.4	Привалов И. И.	Интегральные уравнения: Учебник	Москва: Издательство Юрайт, 2019, https://www.biblio-online.ru/book/integralnye-uravneniya-433812	1

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Колич-во
Л2.1	Пантелеев А. В.	Вариационное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений	М.: Высшая школа, 2006	3

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Колич-во
Л2.2	Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З., Демидович Б.П.	Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: учеб. пособие	Москва: Лань, 2010, http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=537	1
6.1.3. Методические разработки				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Колич-во
Л3.1	Васильева А. Б., Медведев Г. Н., Тихонов Н. А., Уразгильдина Т. А.	Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление в примерах и задачах	М.: Физматлит, 2003	1
Л3.2	Цлаф Л. Я.	Вариационное исчисление и интегральные уравнения: справочное руководство	СПб. [и др.]: Лань, 2005	8
Л3.3	Полянин А. Д., Манжиров А. В.	Интегральные уравнения в 2 ч. Часть 1: Справочник	Москва: Издательство Юрайт, 2019, https://www.biblio-online.ru/book/integralnye-uravneniya-v-2-ch-chast-1-437089	1

6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"	
Э1	Яковлев Г. Н. Функциональные пространства, учебное пособие. Изд. МФТИ, 2005 г.
Э2	Петров И. Ю. Методы математической физики, учебное пособие, СПб: Изд-во СПбГИТМО(ТУ). – 2004. – 104 с. – УДК 517.9
6.3.1 Перечень программного обеспечения	
6.3.1.1	Пакет прикладных программ Microsoft Office
6.3.1.2	Операционная система Windows
6.3.1.3	Пакет MAPLE
6.3.2 Перечень информационных справочных систем	
6.3.2.1	http://www.garant.ru Информационно-правовой портал Гарант.ру
6.3.2.2	http://www.consultant.ru/ Справочно-правовая система Консультант Плюс
6.3.2.3	http://www.arxiv.org

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
7.1	Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа (практических занятий), групповых и индивидуальных консультаций, укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения (доска, экран (стационарный или переносной), портативный проектор):
7.2	Аудитории: У 903, У 902, У 704, У 708, У 701 (адрес: ул. Энергетиков, 22, СурГУ, корп. УНИКИТ).
7.3	Помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечения доступа в электронную информационно-образовательную среду организации:
7.4	Читальные залы Научной библиотеки БУ ВО Ханты-Мансийского автономного округа - Югры «Сургутский государственный университет».
7.5	Адрес: пр. Ленина, 1, г. Сургут, Тюменская обл., 628412, E-mail: lib@surgu.ru

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Приложение №1

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
Приложение к рабочей программе по дисциплине

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Квалификация выпускника	**бакалавр**
Направление подготовки	03.03.02 Физика
Направленность (профиль)	Цифровые технологии в геофизике
Форма обучения	**очная**
Кафедра-разработчик	Кафедра экспериментальной физики
Выпускающая кафедра	Кафедра экспериментальной физики

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Этап: проведение текущего контроля успеваемости по дисциплине

1. Решить задачу вариационного исчисления:
$$J(y)=\int_0^{\pi}\left(y^{¿}-y^2\right)dx\rightarrow extr;\ y(0)=y'(0)=y(\pi)=y'(\pi)=0.$$

2. Решить задачу вариационного исчисления:
$$J(y)=\int_0^{1}e^x\left(y^2+\frac{1}{2}y^{¿}\right)dx\rightarrow extr;\ y(0)=1;\ y(1)=e.$$

3. Решить задачу вариационного исчисления:
$$J(y)=\int_0^{1}(x+1)\,y^{¿}dx\rightarrow extr;\ y(0)=y'(0)=0;\ y(1)=1;\ y'(1)=2.$$

4. Решить задачу вариационного исчисления:
$$J(y)=\int_0^{1}e^y\,y^{¿}dx\rightarrow extr;\ y(0)=0;\ y(1)=\ln 4.$$

5. Найти допустимые экстремали изопериметрической задачи:
$$\int_{-1}^{1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx\rightarrow extr;\ \int_{-1}^{1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=1;\ y(-1)=y(1)=0.$$

6. Среди кривых длины $L=10\arcsin\frac{3}{5}$, соединяющих точки A(-3,0) и B(3,0) и лежащих выше оси абсцисс, определить ту, которая вместе с отрезком AB ограничивает наибольшую площадь.

7. Найти допустимые экстремали изопериметрической задачи:
$$\int_0^{\pi/2}\left(y'^2-y^2\right)dx\rightarrow extr;\quad \int_0^{\pi/2}y\sin x\,dx=1;\qquad y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

8. Решить задачу на условный экстремум:
$$J(y,z)=\int_0^{1}\left(y^2+2y^{¿}+z^{¿}\right)dx,$$
$$y(0)=1,\ z(0)=0,\ y(1)=e+e^{-1},\ z(1)=2e-e^{-1},\ y'-z=0.$$

9. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений:
$$y(x)=\int_1^{2}\sqrt{\frac{x}{t^3}}\,y(t)\,dt+x^{3/2}$$

10. Найти итерированные ядра указанного ядра:
$$K(x,t)=x+\sin t,\ a=-\pi,\ b=\pi$$

11. Найти резольвенту ядра:

$$K(x,t)=xe^{t};a=-1,\ \ b=1.$$

12. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений:

$$y(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t\sin x\ y(t)\,dt+\cos x$$

13. Показать, что функция $\varphi(x)=\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$ является решением интегрального уравнения Вольтерры:

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x\frac{t\varphi(t)}{1+x^2}dt.$$

.

14. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерры с ядром $K(x,t)=1.$

15. Показать, что функция φ является решением интегрального уравнения Вольтерры:

$$\phi(x)=xe^{x};\phi(x)=e^{x}\sin x+2\int_0^x\cos(x-t)\phi(t)\,dt.$$

16. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерры с ядром $K(x,t)=x-t.$

Этап: проведение промежуточной аттестации (зачёта).

Задания для проведения промежуточной аттестации.

17. Найти решение вариационной задачи $\delta J[x(\cdot)]=0$, $x(0)=0$, $x(t_1)=x_1$, где

$$J[x(\cdot)]=\int_0^{t_1}\left[(1+t^2)(x')^2+t^2xx'+tx^2\right]dt$$

.

Проверить, является ли найденное решение экстремумом (каким?) функционала $J[x()]$.

18. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)]=0$, $y(0)=0$, $y(\pi)=1$, где

$$J[y(\cdot)]=\int_0^{\pi}\left[(y'+y)^2+2y\sin x\right]dx$$

.

Проверить, является ли найденное решение экстремумом (каким?) функционала $J[y()]$.

19. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)]=0$, $y(1)=0$, $y(2)=1-\ln 2$, где

$$J[y(\cdot)] = \int_1^2 \left[x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y\ln x}{x} \right] dx$$
.

Реализуется ли экстремум функционала $J[y()]$ на полученном решении?

20. Найти решение вариационной задачи $\delta J[z(\cdot)] = 0$, $z(0) = 4/5$, $z(\pi/2) = e^{\pi}$, где

$$J[z(\cdot)] = \int_0^{\pi/2} \left[(z')^2 + 4z^2 + 2z\cos x \right] dx$$
.

Проверить, является ли найденное решение экстремумом $J[z(\cdot)]$.

21. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)] = 0$, $y(0) = 1$, $y(1/2) = 2$, где

$$J[y(\cdot)] = \int_0^{1/2} \left[\frac{(y')^2}{x^2 - 1} - \frac{2y^2}{(x^2-1)^2} \right] dx$$
.

Реализуется ли экстремум функционала $J[y()]$ на полученном решении?

$\delta J[z(\cdot)] = 0$ $z(0) = 0$,

22. Найти решение вариационной задачи, $z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\,\sinh^3(\pi/4) + \sinh\left(\frac{\pi}{4}\right)$, где

$$J[z(\cdot)] = \int_0^{\pi/4} \left[zz'\arctan x - (z')^2 + \frac{z^2}{2(1+x^2)} - 9z^2 + 16z\sinh x \right] dx$$
.

Проверить, является ли найденное решение экстремумом $J[z(\cdot)]$.

23. Найти решение вариационной задачи $\delta J[z(\cdot)] = 0$, $z(1) = -2$, $z(3) = 2$, где

$$J[z(\cdot)] = \int_1^3 \left[2\sqrt{x}(z')^2 + \frac{z^2}{x\sqrt{x}} - \frac{8z'}{x\sqrt{x}} \right] dx$$
.

Проверить, является ли найденное решение экстремумом $J[z(\cdot)]$.

24. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)] = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = e^{-1}$, где

$$J[y(\cdot)] = \int_0^1 \left[\frac{(y')^2}{y^2} - xy' - y \right] dx$$
.

Реализуется ли экстремум функционала $J[y()]$ на полученном решении?

25. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)] = 0$, $y(1) = 3$, $y(2) = 2$, где

$$J[y(\cdot)] = \int_1^2 \left[y'e^y + x^4(y')^3 \right] dx$$
.

Реализуется ли экстремум функционала $J[y(\cdot)]$ на полученном решении?

26. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)]=\int\limits_0^1[2zz'+(z')^2]dx$, если $z(0)=z(1)=0$, а связь имеет вид: $\int\limits_0^1[4xz'+zz']dx=4$.

27. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)]=\int\limits_0^1[zz'+2(z')^2]dx$, если $z(0)=z(1)=0$, а связь имеет вид: $\int\limits_0^1[-8xz'+zz']dx=8$.

28. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)]=\int\limits_0^\pi[z^2+(z')^2+2z\cos x]dx$, если $z(0)=2,\ z(\pi)=-2$, а связь имеет вид: $\int\limits_0^\pi z\cos x\,dx=\pi$.

29. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)]=\int\limits_0^\pi[2z+3z'+(z')^2]dx$, если $z(0)=0,\ z(\pi)=\pi^2$, а связь имеет вид: $\int\limits_0^\pi z\sin x\,dx=\pi^2-1$.

30. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)]=\int\limits_0^1[2xz+(z')^2]dx$, если $z(0)=0,\ z(1)=3,$ а связь имеет вид: $\int\limits_0^1 zx\,dx=1$.

31. Используя аксиомы гильбертова пространства, доказать неравенство Шварца:

$$\|\chi\|\|\psi\|\geq|(\chi,\psi)|.$$

32. Используя аксиомы гильбертова пространства, доказать неравенство Минковского:

$$\|\chi\|+\|\psi\|\geq\|\chi+\psi\|.$$

33. Доказать, что пространство $L=\left\{\psi:\psi=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{pmatrix}\right\}$ последовательностей образует метрическое пространство, если расстояние между любыми двумя элементами $\psi,\chi\in\mathcal{L}$ задаётся функцией

$$\rho(\psi,\chi)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\frac{|a_n-b_n|}{1+|a_n-b_n|}.$$

Можно ли, сохранив метрическую функцию, превратить пространство $\mathcal{L}$ в банахово (то есть в линейное нормированное пространство), определив в нём операции сложения и умножения на числа?

34. Пусть $\mathcal{H}$ - гильбертово пространство и пусть $\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n\}$ - система попарно ортогональных векторов. Показать: а) что векторы этой системы линейно независимы; б) что если $\phi = \sum_1^n c_k \psi_k$ - произвольная суперпозиция этих векторов, то

$$\|\phi\|^2 = \sum_1^n |c_k|^2 \|\psi_k\|^2 .$$

35. Постройте пример непрерывной функции, у которой первая и вторая производные непрерывны в некоторой точке, а третья имеет разрыв (первого или второго рода).

36. Рассмотрите оператор $\hat{C}_f : C[0,1] \to C[0,1], \quad (\hat{C}_f \psi)(x) = \psi(f(x))$, где $f : [0,1] \to [0,1]$ - заданная дифференцируемая монотонная функция с ограниченной производной. Покажите, что оператор $\hat{C}_f$ - ограниченный, и найдите его норму. В пространстве $C[0,1]$ использовать норму $\|\ldots\|_1$.

37. Оператор «взвешенного сдвига» $\hat{T}: \; l_2 \to l_2$ определяется согласно условию

$$\hat{T}\psi = \hat{T}(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (a_1 x_2, a_2 x_3, a_3 x_4, \cdots),$$

где числа $a_1, \; a_2, \; a_3, \ldots$ - «веса». Найти условие, которому должны удовлетворять веса, чтобы оператор $\hat{T}$ был ограниченным. Определить норму $\hat{T}$.

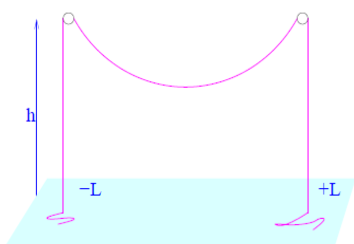
38. Пусть интегральный оператор $\hat{A} : C[0,1] \to C[0,1]$ имеет вид: $(\hat{A}\psi)(x) = \int_0^x t\psi(t)dt$. Показать, что этот оператор ограничен, если в $C[0,1]$ используется $\sup-$ норма (то есть норма $\|\ldots\|_\infty$), и сравнить $\|\hat{A}\|$ с $\|\hat{A}^2\|$. Можно ли на основе полученного сравнения сделать вывод о сжимающем характере отображения, задаваемого оператором $\hat{A}$?

39. Доказать, что линейный оператор является ограниченным тогда и только тогда, когда он непрерывен.

40. Доказать, что если линейный оператор непрерывен в некоторой точке ψ_0 банахового пространства, то он непрерывен и во всей области определения этого оператора.

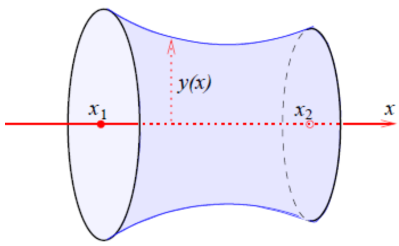
41. Пусть интегральный оператор $\hat{A} : C[0,1] \to C[0,1]$ имеет вид: $(\hat{A}\psi)(x) = \int_0^x \psi(t)dt$. Показать, что если $(\hat{A}\psi)(x) = 0, \;\; \forall x \in [0,1]$, то $\psi(x) = 0$.

42. Найти форму «кривой прогиба» шнура, свободно перекинутого через два блока. Трение в блоках отсутствует. Указание: минимизируйте



потенциальную энергию шнура. Обратите внимание на то, что натяжение в точках подвеса определяется весом свисающей части шнура и, следовательно, постоянно.

43. Мыльная плёнка натянута на два коаксиальных кольца радиусами y_1 и y_2. Свободная энергия F мыльной плёнки пропорциональна площади её поверхности: $F=\sigma S$, $\sigma -$ коэффициент поверхностного натяжения. Принимая, что в положении равновесия свободная энергия минимальна, определить форму поверхности. Указание: эффектами гравитации пренебречь и использовать тот факт, что в этом случае плёнка принимает форму поверхности вращения.



44. Нерастяжимый шнур длины ℓ закреплён на двух опорах в точках A_1 и A_2, расположенных на одинаковой высоте. Расстояние $A_1A_2 = L < \ell$. Определить форму кривой.

45. Доказать, что ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве и обладающий всюду плотной областью определения, замыкаем.

46. Пусть $\hat{A}$ - интегральный оператор Вольтерры, $\hat{A}: C[a,b] \to C[a,b]$,

$$(\hat{A}\psi)(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\psi(t)dt + \Phi_0(x)\,, \quad a \le x \le b\,.$$

Функция $\Phi_0(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $K(x,t)$ - в квадрате $[a,b]\times[a,b]$.

Показать, что отображение, задаваемое таким оператором, будет сжимающим. Подсказка: используйте ограниченность ядра.

47. Рассмотрите последовательность функций $\{x^n\}_{n=0}^{n=\infty}$. Покажите, что эта последовательность не является сходящейся (к какой функции?) в пространстве $C[0,1]$ по $\sup-$норме, но сходится по норме $\|\ldots\|_1$.

48. Рассмотрите в качестве линейного нормированного пространства вещественную плоскость E_2. Укажите множество точек на этой плоскости, которые соответствуют «единичному шару» $\|\psi\| \le 1$, $\psi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, для трёх вариантов норм: $\|\ldots\|_1$, $\|\ldots\|_2$ и $\|\ldots\|_\infty$.

49. Рассмотрите последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ из $C[0,1]$, определяемую согласно равенству:

$$f_n(x)=\begin{cases}1-nx\,, & 0\le x\le \dfrac{1}{n}\,;\\ 0\,, & \dfrac{1}{n}\le x\le 1\,.\end{cases}$$

Проверьте, что $\|f_n\|_\infty = 1 \;\; \forall n$, в то время как $\|f_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3n}} \to 0$. Какой вывод на основании этого факта можно сделать о свойствах последовательностей функций в разных банаховых пространствах?

50. Найти решение интегрального уравнения:

$$f(x)=x^3+\int_0^{\pi}\sin(x-t)f(t)dt\,.$$

51. Найти решение интегрального уравнения:

$$f(x)=x^2+\int_0^{\pi}\cos(x-t)f(t)dt\,.$$

52. Решить систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases}x(t)=t^2+\int_0^t y(\tau)d\tau\,,\\ y(t)=t+\int_0^t z(\tau)d\tau\,,\\ z(t)=1+\int_0^t x(\tau)d\tau\,.\end{cases}$$

53. Решить систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases}x(t)=t+\int_0^t y(\tau)d\tau\,,\\ y(t)=1+\int_0^t x(\tau)d\tau\,.\end{cases}$$

54. Найти решение уравнения Вольтерры первого рода:

$$\Phi_0(x)=\int_0^x \ln(x/\tau)f(\tau)d\tau\,,$$

в котором $\Phi_0(x)$ - заданная функция.

55. Найти решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\psi(x)=\chi(x)+\int_0^1 (xy^3+x^3y)\psi(y)dy\,,$$

выразив его через моменты заданной функции $\chi(x)$.

Компетенции, формируемые в процессе выполнения заданий
(знаком «*» отмечены задания повышенной сложности из приведённого выше списка)

ОК-6: способностью работать в коллективе, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия (Компетенция формируется в процессе коллективного обсуждения и анализа решения задач)	**ОК-7:** способностью к самоорганизации и самообразованию (здесь использованы задачи, решения которых подробно описаны в рекомендованных учебных пособиях)	**ОПК-2:** способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей
№ 37*, № 45* - № 49*;	№ 31 - № 34;	№ 1 - № 4; № 5*-№ 8*; №9 - № 16; № 17* - № 30* № 35*, 36*; №38* - № 45*; № 50 - № 55;

Примеры решений.

Задача: Рассмотрите последовательность функций $\{x^n\}_{n=0}^{n=\infty}$. Покажите, что эта последовательность не является сходящейся (к какой функции?) в пространстве $C[0,1]$ по $\sup-$ норме, но сходится по норме $\|\dots\|_1$.

Решение: $при\, n\to\infty\, x^n\to 0\,, если\, 0<x<1$. Однако ¿$(x^n)=1\ \forall n$. Тем самым по $\sup-$ норме последовательность $\{x^n\}$ не сходится к нулевой функции. С другой стороны, $\int\limits_0^1 |x^n-0|dx=\frac{1}{n+1}\to 0$ ∎.

Задача: Найти решение интегрального уравнения: $f(x)=x+\int\limits_0^x \cos(x-t)f(t)\,dt$.

Решение. 1-й способ – использование преобразования Лапласа. Введём обозначения:

$$F_1(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx\,;\,F_2(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}\cos(x)\,dx\,.$$

Используем свойства преобразования Лапласа: образ функции x равен $1/s^2$, а преобразование Лапласа свёртки (второе слагаемое в правой части интегрального уравнения) даёт произведение лапласовских образов $F_1(s)$ и $F_2(s)$. Таким образом, получаем:

$$F_1(s)=\frac{1}{s^2}+F_1(s)F_2(s)\,.$$

Явный вид функции $F_2(s)$ находится после двукратного интегрирования по частям:

$$F_2(s)=s\int\limits_0^\infty e^{-sx}\sin(x)\,dx=s¿,$$

то есть $F_2(s)(1+s^2)=s$, – и мы окончательно находим лапласовский образ искомой функции,

$$F_1(s)=\frac{1+s^2}{s^2(1+s^2-s)} .$$

Полюсы этой функции – суть точки $s=0; s=e^{i\pi/3} u s=e^{-i\pi/3}$. Совершая обратное преобразование Лапласа так, чтобы все полюсы оставались левее (вертикального) контура интегрирования в комплексной плоскости s, и используя вычеты в указанных точках, окончательно находим:

$$f(x)=x+1+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{x/2}\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}\right).\blacksquare$$

2-й способ – сведение интегрального уравнения к дифференциальному. Дважды дифференцируем обе части интегрального уравнения и, используя в правой части само интегральное уравнение, получаем:

$$f''(x)=f'(x)-f(x)+x.$$

Мы получили неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого есть сумма частного решения неоднородного и общего решения однородного уравнения. Частное решение, очевидно, есть $x+1$, а общее решение однородного уравнения находится обычным способом – с использованием корней характеристического многочлена; в свою очередь, эти корни совпадают с указанными выше полюсами лапласовского образа искомой функции (за исключением нуля). Остаётся учесть начальные условия $f(0)=0 u f'(0)=1$, которые следуют из самого интегрального уравнения. ∎

Задача. Найти решение уравнения Вольтерры первого рода:

$$\Phi_0(x)=\int_0^x \ln(x/\tau)f(\tau)d\tau ,$$

в котором $\Phi_0(x)$ - заданная функция.

Решение. Дифференцируем обе части равенства и находим:

$$\Phi_0'(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Таким образом, искомая функция равна $f(x)=\frac{d}{dx}(x\Phi_0'(x)).\blacksquare$

Задача. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)]=0, y(0)=1, y\left(\frac{1}{2}\right)=2$, где

$$J[y(\cdot)]=\int_0^{1/2}\left[\frac{(y')^2}{x^2-1}-\frac{2y^2}{(x^2-1)^2}\right]dx .$$

Реализуется ли экстремум функционала $J[y()]$ на полученном решении?

Решение. Записываем уравнения Эйлера – Лагранжа: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$ **,** где функция Лагранжа L – это подынтегральное выражение, стоящее в квадратных скобках. Упрощая, получаем:

$$\left(1-x^2\right) y''(x)+2x\, y'(x)-2\, y(x)=0.$$

Это уравнение решается методом Фробениуса. Представляем искомую функцию в виде степенного ряда

$$y(x)=\sum_0^{\infty} C_k x^k$$

и после подстановки в полученное дифференциальное уравнение находим рекуррентное соотношение между коэффициентами:

$$C_{k+2}=C_k \frac{(k-2)(k-1)}{(k+2)(k+1)} .$$

Из этого соотношения следует, что все коэффициенты C_k (кроме $C_0, C_1 u\, C_2$) обращаются в нуль. Тогда с применением граничных условий $y(0)=1, y\left(\frac{1}{2}\right)=2$ окончательно находим ответ: $\acute{y}(x)=1+\frac{5}{2}x+x^2$. Остаётся выяснить, реализуется ли экстремум функционала $J[y(\cdot)]$ на функции $\acute{y}(x)$. Для ответа на этот вопрос представим функцию сравнения в виде: $y(x)=\acute{y}(x)+\eta(x)$, где произвольная малая функция $\eta(x)$ удовлетворяет граничным условиям $\eta(0)=0, \eta\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Рассмотрим разность

$$J[\acute{y}+\eta]-J[\acute{y}]=-\int_0^{1/2}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{2\acute{y}'(x)}{1-x^2}\eta(x)\right)-\eta(x)\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{2\acute{y}'(x)}{1-x^2}\right)-\frac{4\acute{y}(x)}{\left(1-x^2\right)^2}\right]+\frac{\eta'^2}{1-x^2}+\frac{2\eta^2}{\left(1-x^2\right)^2}\right\} .$$

Первое слагаемое в фигурных скобках после интегрирования даёт нуль в силу граничных условий для функции $\eta(x)$. Выражение в квадратных скобках равно нулю, так как оно представляет уравнение Эйлера – Лагранжа для функции $\acute{y}(x)$. Два оставшихся слагаемых, очевидно, не отрицательны и обращаются в нуль только, если $\eta(x)\equiv 0$. Тем самым найденное решение $\acute{y}(x)=1+\frac{5}{2}x+x^2$ реализует экстремум (максимум) функционала $J[y(\cdot)]$.∎

Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Этап: Проведение текущего контроля успеваемости по дисциплине

Текущий контроль предназначен для проверки качества формирования компетенций, уровня овладения теоретическими и практическими знаниями, умениями и навыками. Оценивание знаний теоретического материала по каждому разделу проводится на практических занятиях, при этом проверяется уровень сформированности компетенций ОК-6, ОК-7. Умение решать задачи проверяется контрольной работой (проверяется сформированность компетенций ОК-6, ОК-7, ОПК-2).

Критерии оценивания контрольных работ

Отлично	Задачи решены полностью: приводится верное аналитическое решение, делается правильный расчет.
Хорошо	Приведены решения задач контрольной работы, но есть небольшие недочеты при использовании законов, формул, в целом не влияющих на ход решения, допущены ошибки при вычислении численных результатов. Общая доля невыполненных заданий не превышает 5–7 % от общего объема контрольной работы.
Удовлетворительно	Приведены решения не всех заданий контрольной работы, есть существенные недостатки при выводе аналитических выражений, не проведены численные расчеты. Общая доля невыполненных заданий составляет не более 50 % от общего объема контрольной работы.
Неудовлетворительно	Решения заданий приведены неверно или вовсе отсутствуют. Общая доля невыполненных заданий составляет более 50 % от общего объема контрольной работы.

Этап: проведение промежуточной аттестации по дисциплине

Проведение промежуточной аттестации происходит в виде зачёта.

Примерные типы заданий к зачету:

	Вид задания и формируемые компетенции
Сформулируйте развернутые ответы на следующие теоретические вопросы (при необходимости продемонстрируйте вывод уравнений и доказательства теорем): **1.** Примеры задач вариационного исчисления. **2.** Определение функционала. **3.** Основные леммы вариационного исчисления. **4.** Уравнение Эйлера. **5.** Определение вариации. **6.** Варианты уравнения Эйлера для функций от различных аргументов. **7.** Уравнение Эйлера для случая нескольких функций. **8.** Примеры изопериметрических задач. **9.** Необходимые условия экстремума. **10.** Примеры проблем, приводящих к задачам на условный экстремум. **11.** Необходимые условия экстремума. **12.** Определение второй вариации **13.** Условия Лежандра **14.** Уравнение Якоби **15.** Определение вида интегрального уравнения. **16.** Примеры задач, приводящих к интегральным уравнениям. **17.** Классификация интегральных уравнений. **18.** Элементы функционального анализа: метрические, линейные, банаховы и гильбертовы пространства. Определения и примеры. **19.** Ограниченные операторы. Понятие нормы оператора. Примеры. **20.** Теорема о сжимающем отображении. **21.** Метод последовательных приближений	- теоретический **ОК-7, ОПК-2**

22. Определение итерированного ядра. **23.** Метод итерированных ядер. **24.** Определение резольвенты. **25.** Определение и свойства вырожденного ядра. ***26.*** Метод решения уравнений с вырожденным ядром. ***27.*** Преобразование Лапласа и его свойства. ***28.*** Теорема о свёртке для преобразования Лапласа. Решение уравнений Вольтерра второго рода с помощью теоремы о свёртке.	

	Вид задания и формируемые компетенции
26. Простейшая задача классического вариационного исчисления. 27. Привести пример задачи классического вариационного исчисления со старшими производными. 28. Привести пример задачи классического вариационного исчисления с двумя степенями свободы. 29. Привести пример задачи на условный экстремум. 30. Решить изопериметрическую задачу. 31. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом последовательных приближений. 32. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом итерированных ядер. 33. Найти итерированные ядра для заданного ядра. 34. Найти резольвенту для заданного ядра. 35. Решить интегральное уравнение Вольтерра методом последовательных приближений.	- практический **ОК-7, ОПК-2**

	Вид задания и формируемые компетенции
36. Решить простейшую задачу классического вариационного исчисления. 37. Решить задачу классического вариационного исчисления со старшими производными. 38. Решить простейшую задачу классического вариационного исчисления с двумя степенями свободы. 39. Решить задачу на условный экстремум. 40. Решить изопериметрическую задачу. 41. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом последовательным приближений. 42. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом итерированных ядер. 43. Найти итерированные ядра для заданного ядра. 44. Найти резольвенту для заданного ядра. 45. . Решить интегральное уравнение Вольтерра методом	Практический **ОК-7, ОПК-2**

последовательных приближений. 46. Решить уравнение Вольтерра с применением теоремы о свёртке для преобразования Лапласа.	

Условия допуска студента к зачёту

Для того, чтобы быть допущенным к сдаче зачёта, студенту необходимо выполнить следующие требования:

1) регулярно посещать аудиторные занятия по дисциплине (пропуск занятий не допускается без уважительной причины); в случае пропуска занятия студент должен быть готов ответить на вопросы преподавателя, относящиеся к пропущенной теме;
2) выполнить контрольные работы на оценку «отлично», «хорошо» или «удовлетворительно», провести анализ ошибок контрольной работы.

Этап: Проведение промежуточной аттестации (зачет)

Результаты текущего контроля знаний оцениваются по двухбалльной шкале с оценками:

1. «зачтено»;
2. «не зачетно».

Дескриптор компетенции	Показатель оценивания	Оценка	Критерий оценивания
Знает	- примеры физических систем, описываемых интегральными уравнениями; - базовые понятия функционального анализа (метрические пространства, банаховы и гильбертовы пространства, линейные ограниченные операторы и т.д.), а также конкретные примеры функциональных пространств и линейных операторов; - формулировки основных теорем в теории ограниченных операторов в банаховых пространствах; - классификацию видов интегральных уравнений, содержание теорем Фредгольма; - основные типы задач в вариационном исчислении, примеры применения вариационных принципов в механике, статике, электродинамике.	Зачет	- обнаруживает знание перечисленных вопросов в объёме не ниже 50%.
		Не зачтено	- обнаруживает знание перечисленных вопросов в объёме ниже 50%.
Умеет	- самостоятельно находить необходимую информацию или ссылки на сертифицированные издания по вопросам интегральных уравнений и вариационного исчисления;	Зачтено	-обнаруживает перечисленные умения в объёме не ниже 50%.

	- осуществлять поиск необходимой информации и её хранение в каталогизированной форме; - пользоваться учебной и научной литературой для профессиональной деятельности; - использовать определения основных понятий теории функциональных пространств и теории операторов, логически правильно выстраивать доказательства теорем; - решать простейшие интегральные уравнения, находить приближённые решения и оценки степени приближения к точным решениям; - правильно ставить вариационные задачи с учётом граничных условий и/или связей, получать определяющие экстремум дифференциальные уравнения, а также условия сопряжения в точках разрыва.	Не зачтено	-обнаруживает перечисленные умения в объёме ниже 50%.
Владеет	- методами нахождения решений интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерры в том числе – приближёнными; - методами сведения интегральных уравнений Вольтерры к ОДУ; - методом преобразования Лапласа для интегральных уравнений типа свёртки; - методом неопределённых множителей Лагранжа, методом Лежандра.	Зачтено	- решения контрольных заданий и анализ ошибок представлены в объёме не ниже 50%
		Не зачтено	- решения контрольных заданий и анализ ошибок проведены в объёме ниже 50%