



## **МОДУЛЬ "МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ"**

### **Линейные и нелинейные уравнения физики** **рабочая программа дисциплины (модуля)**

Закреплена за кафедрой      **Экспериментальной физики**

Учебный план                    b030302-ЦифрТех-19-1.plx  
 03.03.02 ФИЗИКА  
 Направленность (профиль): Цифровые технологии в геофизике

Квалификация                 **Бакалавр**

Форма обучения                **очная**

Общая трудоемкость         **2 ЗЕТ**

Часов по учебному плану	72	Виды контроля в семестрах: зачеты 5
в том числе:		
аудиторные занятия	32	
самостоятельная работа	40	

**Распределение часов дисциплины по семестрам**

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	5 (3.1)		Итого	
	Неделя	17,3		
Вид занятий	уп	рпд	уп	рпд
Лекции	16	16	16	16
Практические	16	16	16	16
Итого ауд.	32	32	32	32
Контактная работа	32	32	32	32
Сам. работа	40	40	40	40
Итого	72	72	72	72

Программу составил(и):  
к.ф.-м.н., доцент, Лебедев С.Л.



Рабочая программа дисциплины  
**Линейные и нелинейные уравнения физики**

разработана в соответствии с ФГОС:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 03.03.02 (уровень бакалавриата) (приказ Минобрнауки России от 07.08.2014г. №937)

составлена на основании учебного плана:

03.03.02 ФИЗИКА

Направленность (профиль): Цифровые технологии в геофизике

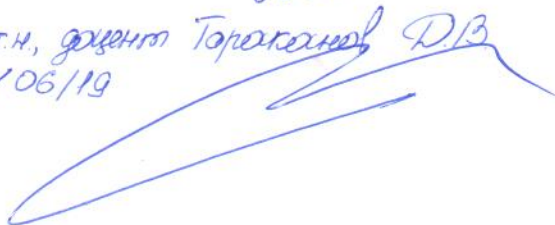
утвержденного учёным советом вуза от 20 июня 2019 г., протокол УС №6.

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры  
**Экспериментальной физики**

Протокол от 14 05 2019 г. № 03/10  
Срок действия программы: - уч.г.  
Зав. кафедрой д.ф.-м.н., с.н.с. Ельников А.В.



Председатель УМС к.т.н., доцент Тараканов Д.В.  
04 06 2019 г. 106/19



<b>1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ</b>	
1.1	Привить навыки использования различных асимптотических методов решения нелинейных дифференциальных уравнений. Познакомить с ключевыми понятиями теории динамических систем и - в том числе - с методом дискретных отображений. Сформировать представление о многообразии и универсальности приложений качественной теории дифференциальных уравнений.
<b>2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП</b>	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.Б.09
<b>2.1</b>	<b>Требования к предварительной подготовке обучающегося:</b>
2.1.1	Теоретическая механика
2.1.2	Вычислительная физика
<b>2.2</b>	<b>Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:</b>
2.2.1	Механика жидкости и газа
2.2.2	Подземная гидродинамика
<b>3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)</b>	
<b>ОК-6: способностью работать в коллективе, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия</b>	
<b>ОК-7: способностью к самоорганизации и самообразованию</b>	
<b>ОПК-2: способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей</b>	

**В результате освоения дисциплины обучающийся должен**

<b>3.1</b>	<b>Знать:</b>
3.1.1	- примеры физических систем, описываемых линейными и нелинейными ДУ, физические причины, приводящие к нелинейности;
3.1.2	- основы приближённых методов нахождения решений нелинейных ОДУ;
3.1.3	- классификацию особых точек двумерных фазовых потоков;
3.1.4	- основные свойства дискретных отображений (эффект удвоения периода, универсальность Фейгенбаума и т.д.);
3.1.5	- электронные источники научной и научно-популярной периодики, а также электронные библиотеки препринтов, находящиеся в открытом доступе.
<b>3.2</b>	<b>Уметь:</b>
3.2.1	- применять методы теории возмущений для нахождения приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений, практически использовать такие понятия, как устойчивость по Ляпунову, предельный цикл, бифуркация, фазовый портрет и т.д.;
3.2.2	- определять тип особой точки в двумерном случае;
3.2.3	- проводить расчёты с использованием современных методов компьютерного моделирования динамических систем;
3.2.4	- осуществлять поиск необходимой информации и её хранение в каталогизированной форме;
3.2.5	- пользоваться учебной и научной литературой для профессиональной деятельности.
3.2.6	- работать в составе группы, учитывая наличие конфессиональных и культурных различий
<b>3.3</b>	<b>Владеть:</b>
3.3.1	- техникой асимптотических вычислений;
3.3.2	- прикладными пакетами программ, моделирующих фазовые потоки;
3.3.3	- методами визуализации результатов вычислений;
3.3.4	- методами анализа качества информации, получаемой из сети интернет.

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетенции	Литература	Инте ракт.	Примечание
	<b>Раздел 1. Введение. Круг задач и примеры нелинейных систем</b>						
1.1	Введение. Круг задач и примеры нелинейных систем /Лек/	5	1	ОК-6	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Э2 Э4	0	Опрос
1.2	Введение. Круг задач и примеры нелинейных систем /Пр/	5	1	ОК-6	Л2.1 Э2 Э3 Э4	0	Опрос
1.3	Введение. Круг задач и примеры нелинейных систем /Ср/	5	5	ОК-7 ОПК-2	Л1.2 Э2 Э3 Э4	0	Подготовка к практическим занятиям
	<b>Раздел 2. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний</b>						
2.1	Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний /Лек/	5	5	ОК-6 ОК-7	Л1.1 Л1.3 Л1.5	0	Опрос
2.2	Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний /Пр/	5	6	ОК-6 ОПК-2	Л1.1 Л1.3 Л1.5Л2.1 Э2	0	Опрос
2.3	Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний /Ср/	5	11	ОК-7 ОПК-2	Л1.3 Э2 Э3	0	Подготовка к практическим занятиям
	<b>Раздел 3. Системы с самовозбуждением. Автоколебания</b>						
3.1	Системы с самовозбуждением. Автоколебания /Лек/	5	4	ОК-6 ОК-7	Л1.3 Л1.5 Э2 Э3	0	
3.2	Системы с самовозбуждением. Автоколебания /Пр/	5	3	ОК-6 ОПК-2	Л1.1Л2.1 Э2 Э3	0	Опрос
3.3	Системы с самовозбуждением. Автоколебания /Ср/	5	8	ОК-7 ОПК-2	Л1.1	0	Подготовка к практическим занятиям
	<b>Раздел 4. Основы теории динамических систем</b>						
4.1	Основы теории динамических систем /Лек/	5	3	ОК-6	Л1.1 Л1.3 Л1.5	0	
4.2	Основы теории динамических систем /Пр/	5	3	ОК-6 ОПК-2	Л1.5 Э2 Э4	0	Контрольная работа
4.3	Основы теории динамических систем /Ср/	5	8	ОК-7 ОПК-2	Л1.1	0	Подготовка к пр. занятиям
	<b>Раздел 5. Метод дискретных отображений в теории динамических систем</b>						
5.1	Метод дискретных отображений в теории динамических систем /Лек/	5	3	ОК-6 ОК-7	Л1.2 Л1.3	0	
5.2	Метод дискретных отображений в теории динамических систем /Пр/	5	3	ОК-6 ОПК-2	Л1.2	0	Защита расчётно-графических работ
5.3	Метод дискретных отображений в теории динамических систем /Ср/	5	8	ОК-7 ОПК-2	Л1.2	0	Подготовка к зачёту
	<b>Раздел 6. Линейные и нелинейные уравнения</b>						
6.1	/Зачёт/	5	0	ОК-6 ОК-7 ОПК-2	Л1.1 Л1.3	0	

#### 5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

##### 5.1. Контрольные вопросы и задания

Приложение № 1

##### 5.2. Темы письменных работ

Письменные (курсовые) работы учебным планом не предусмотрены

##### 5.3. Фонд оценочных средств

Приложение № 1

##### 5.4. Перечень видов оценочных средств

**6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)****6.1. Рекомендуемая литература****6.1.1. Основная литература**

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Колич-во
Л1.1	Малинецкий Г. Г.	Математические основы синергетики: хаос, структуры, вычислительный эксперимент	М.: URSS, 2005	22
Л1.2	Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.	Структуры и хаос в нелинейных средах	М.: Физматлит, 2007	4
Л1.3	Алдошин Г. Т.	Теория линейных и нелинейных колебаний: учебное пособие для студентов и аспирантов физико-технических вузов	Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2013	6
Л1.4	Ахромеева Т. С.	Структуры и хаос в нелинейных средах	Москва: Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2007, <a href="http://znanium.com/go.php?id=544687">http://znanium.com/go.php?id=544687</a>	1
Л1.5	Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И.	Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения: Учебник и практикум	Москва: Издательство Юрайт, 2019, <a href="https://www.biblio-online.ru/book/nelineynye-uravneniya-matematicheskoy-fiziki-i-mehaniki-metody-resheniya-437088">https://www.biblio-online.ru/book/nelineynye-uravneniya-matematicheskoy-fiziki-i-mehaniki-metody-resheniya-437088</a>	1

**6.1.2. Дополнительная литература**

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Колич-во
Л2.1	Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И.	Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения: Учебник и практикум	Москва: Издательство Юрайт, 2019, <a href="https://www.biblio-online.ru/bcode/437088">https://www.biblio-online.ru/bcode/437088</a>	1

**6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"**

Э1	Государственная публичная научно-техническая библиотека России (ГПНТБ России)			
Э2	В.С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, Лекции по нелинейной динамике. Саратов: Из-во СГУ, 2010			
Э3	Алексей Васильев, презентация: 10 лекций			
Э4	А.В. ШАПОВАЛОВ, Введение в нелинейную физику, Томск, Из-во Томского Политехн. ун-та, 2002			

**6.3.1 Перечень программного обеспечения**

6.3.1.1	Microsoft Office			
6.3.1.2	MAPLE			

**6.3.2 Перечень информационных справочных систем**

6.3.2.1	<a href="http://www.garant.ru/">http://www.garant.ru/</a> Информационно-правовой портал Гарант.ру			
6.3.2.2	<a href="http://www.consultant.ru/">http://www.consultant.ru/</a> Справочно-правовая система Консультант Плюс			

**7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

7.1	Помещения для проведения лекционных и лабораторных занятий укомплектованы необходимой специализированной учебной мебелью. Ряд лекционных аудиторий оснащен компьютерной техникой и проекторами для демонстрации видеоматериалов. Предполагается наличие компьютерного класса, оснащённого пакетом для символьных вычислений и моделирования MAPLE (MathLAB, МАТЕМАТИСА).			
-----	--	--	--	--

**8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Приложение № 1

**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА**  
**Приложение к рабочей программе по дисциплине**

**ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЗИКИ**

Квалификация  
выпускника

Бакалавр

Направление  
подготовки

03.03.02  
Физика

Направленность  
(профиль)

Цифровые технологии в геофизике

Форма обучения

очная

Кафедра-  
разработчик

Кафедра экспериментальной физики

Выпускающая  
кафедра

Кафедра экспериментальной физики

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Этап: проведение текущего контроля успеваемости по дисциплине (5 семестр)

## РАЗДЕЛЫ II - V

- II. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний
- III. Системы с самовозбуждением. Автоколебания
- IV. Основы теории динамических систем
- V. Метод дискретных отображений в теории динамических систем

Компетенции, формируемые в процессе выполнения заданий – это ОК-7 и ОПК-2

- 1) Рассмотрите ангармонический осциллятор с затуханием,  $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x + \varepsilon x^5 = 0$ , в пределе сильного затухания:  $(\omega_0^2/4\beta^2) \ll 1$ . Постройте приближенное решение, используя метод многих масштабов. Обратите внимание на то, что малым параметром здесь следует считать  $\varepsilon_1 = \omega_0^2/4\beta^2$ . Предварительно перейдите от размерного времени  $t$  к безразмерному (например,  $\tau = \omega_0^2 t / 2\beta$ ).

- 2) Рассмотрите динамическую систему, описываемую уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x(\lambda_1 - \lambda_2 x - y), \\ \dot{y} = x\sqrt{1-y^2} + y^2 - 1, \\ |y| \leq 1, x \geq 0. \end{cases}$$

Исследуйте фазовый портрет этой системы; установите: а) наличие или отсутствие особых точек в зависимости от значений параметров; б) наличие бифуркаций, предельных циклов, и т.д.

- 3) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка для уравнения  $\ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon(1-x^4)\dot{x} = 0$ , считая  $\varepsilon \ll \omega_0$  (обратите внимание на то, что  $[x]=1$ ). Использовать метод многих масштабов и метод усреднения.

- 4) Рассмотрите модель «хищник-жертва», в которой  $x$  и  $y$  - количество особей «жертв»

и «хищников» соответственно:  $\begin{cases} \dot{x} = \alpha(x)x - xy, \\ \dot{y} = xy - my \end{cases}$ ,  $\alpha(x) = a + bx - x^2$  (при  $\alpha = const$  эта модель совпадает с моделью Лоттки – Вольтерра).

Покажите, что бифуркация Андронова – Хопфа возможна не при любых значениях постоянных  $a$  и  $b$  (NB: по своему смыслу коэффициент  $\alpha(x) > 0$ !). Каким должен быть характер функции  $\alpha(x)$  для того, чтобы бифуркация была возможна? Постройте

графики зависимостей  $x(t)$  и  $y(t)$  для нескольких выбранных значений параметров  $a, b$  и  $m$ .

- 5) Построить равномерно пригодное разложение второго порядка для осциллятора Дюффинга,  $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0$ ,  $\varepsilon / \omega_0^2 \ll 1$ , используя метод Линдштедта – Пуанкаре.
- 6) Рассмотрите т.н. автоколебательную систему с жестким возбуждением:  $\ddot{x} - (\lambda + \varepsilon x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$ . Исследуйте её фазовый портрет. Ответьте на следующие вопросы:  
 А) существует ли стационарная точка? Если да, то при каких значениях параметров она устойчива (проиллюстрировать графиком)?  
 Б) выяснить, имеются ли у этой системы предельные циклы (в каком диапазоне значений параметров?) и являются ли они устойчивыми (т.е. аттракторами).  
 В) Какие свойства системы, по вашему мнению, дали основание назвать ее системой с «жестким возбуждением»?
- 7) Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить равномерное по времени разложение первого порядка для уравнения  $\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon \omega_0 x^3 = 0$ ,  $\varepsilon \ll \omega_0$ ,  $[x] = 1$ .
- 8) Исследуйте фазовые портреты для динамической системы, задаваемой уравнениями (уравнения колебаний самолета):

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \rho - \cos \varphi, \\ \dot{\rho} = 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin \varphi). \end{cases}$$

Варьируя один из параметров, проверьте наличие в такой системе бифуркации Андронова – Хопфа (оцените порог бифуркации), а также установите диапазон параметров, в котором происходит рождение предельного цикла и его дальнейшая эволюция.

- 9) Найдите поправку (она может зависеть от амплитуды) к частоте линейных колебаний осциллятора, описываемого уравнением  $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^5 = 0$ . Используйте любой из асимптотических методов.
- 10) Исследуйте систему (описывающую колебания в гликолизе):

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy^\gamma, \\ \dot{y} = \alpha(xy^\gamma - y). \end{cases}$$

Варьируя параметры  $\alpha$  и  $\gamma$ , установите, при каких значениях параметров в системе возникает бифуркация Андронова – Хопфа (бифуркация рождения предельного цикла). Как эволюционирует этот предельный цикл с ростом параметра  $\alpha$  ( $\gamma$ )? Выводы подкрепить соответствующими графиками.



11) Рассмотрите уравнение  $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta \dot{x}^3 = 0$ , ( $\omega_0 \beta \ll 1$ ). Используя метод многих масштабов и метод усреднения построить равномерно пригодное разложение первого порядка для функции  $x(t)$  [введите безразмерное время  $\tau = \omega_0 t$  и используйте малость параметра  $\varepsilon = (\omega_0 \beta)^{-1} \ll 1$ ].

12) Рассмотрите динамическую систему (Лоренца):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

при  $r = 5, 12, 13.927, 20, 24.06, 28$  и  $\sigma = 10, b = 8/3$ . Проанализируйте результаты и ответьте на следующие вопросы:

А) имеют ли место бифуркации в этой системе?

Б) чему равно пороговое значение параметра бифуркации? (дайте оценку)

В) при каких значениях  $\sigma$  и  $b$  данная система является консервативной? Гамильтоновой?

13) Используя метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для функции  $x(t)$ , удовлетворяющей уравнению  $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \varepsilon[\omega_0 \dot{x}(t)(1 - \lambda \dot{x}^2(t)) + \dot{x}^2(t)x(t)]$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

14) Изучите поведение фазовых траекторий для генератора Кислова – Дмитриева, описываемого системой уравнений

$$\begin{cases} T\dot{x} + x = Mze^{-z^2}, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = y - \frac{z}{Q}. \end{cases}$$

Установите (с некоторой вероятностью) наличие или отсутствие предельных циклов при  $T=1$  и  $Q=10$  ( $M$  - управляющий параметр) и стационарных точек. Дайте соответствующие графические изображения. Как проявляется на графиках симметрия системы Кислова – Дмитриева по отношению к одновременному изменению знаков всех трех координат?

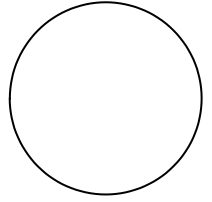
15) Исследовать поведение фазовых траекторий системы Лоттки – Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = (a - b y)x, \\ \dot{y} = (-c + d x)y, \end{cases} \quad a, b, c, d > 0$$

Найти характеристические показатели Ляпунова и сделать вывод о характере стационарной точки. Получить аналитическое выражение для интегральных кривых

на фазовой плоскости (то есть найти уравнение вида  $F(x, y) = 0$  для фазовых траекторий).

- 16) Тонкая проволока в форме окружности радиуса  $R$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, лежащей в плоскости окружности и проходящей через её центр. По проволоке без трения может скользить бусинка. При некотором значении  $\omega = \omega_c$  бусинка покидает нижнее положение равновесия и переходит в новое (угол  $\varphi = \varphi_0$ ). Получите уравнение движения бусинки и на его основе определите стационарные точки и значение критической частоты  $\omega_c$ . На фазовой плоскости построить фазовые портреты для случаев  $\omega < \omega_c$  и  $\omega > \omega_c$ , указав на нем расположение характерных точек, сепаратрис и т.д. Построить график зависимости периода колебаний от энергии для случая  $\omega > \omega_c$  [здесь можно использовать переменные действие-угол либо (что более трудоемко) построить временные зависимости угла  $\varphi(t)$  при разных начальных данных и по ним вычислить период].



- 17) Исследовать, при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  динамическая система, описываемая уравнениями
- $$\begin{cases} \dot{x} = a - (b+1)x + x^2y, \\ \dot{y} = bx - x^2y \end{cases},$$
- имеет устойчивую стационарную точку. Найти эти стационарные решения. Определить тип стационарной точки.

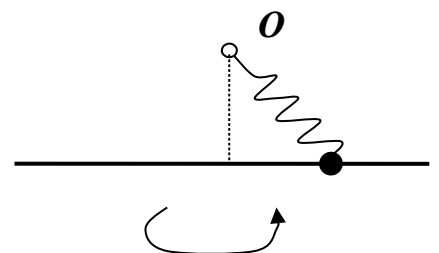
- 18) Исследуйте систему Ресслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y+z), \\ \dot{y} = x+ay, \\ \dot{z} = b+z(x-c) \end{cases}$$

- для  $b = 2, c = 4$  и различных значений  $a$ . Имеются ли у этой системы аттракторы (при каких значениях  $a$ )? Постройте проекции нескольких фазовых траекторий на координатные плоскости и дайте их 3-мерное изображение. Имеются ли в фазовом пространстве стационарные точки и, если да, каковы их координаты?

- 19) Найти равномерно пригодное разложение второго порядка для уравнения  $\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon x^2 + \varepsilon \dot{x}^2 = 0$  ( $\varepsilon \ll 1$ ). Является ли рассматриваемая система гамильтоновой?

- 20) Динамическая система представляет собой шарик, перемещающийся без трения по горизонтальной спице. Шарик прикреплен к легкой пружине, второй конец которой закреплен шарнирно в точке  $O$ , находящейся на расстоянии  $l_0$  от спицы. Спица приводится во



вращение с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через точку  $O$ . Жёсткость пружины -  $k$ , масса шарика -  $m$ , длина нерастянутой пружины совпадает с  $\ell_0$ . Получить уравнения движения динамической системы. Исследовать её фазовые портреты при различных значениях  $\Omega$ . Указать положение и характер особых точек на фазовой диаграмме. Установить наличие бифуркационных значений параметра  $\Omega$  и их физический смысл.

21) Построить равномерно пригодное разложение второго порядка для уравнения  $\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon^2 x^3 + \varepsilon \dot{x}^2 = 0$  ( $\varepsilon \ll 1$ ).

22) Исследуйте динамическую систему, описываемую уравнением  $\ddot{x} + \omega^2 x - (\varepsilon + \cos(x))\dot{x} = 0$ , рассматривая параметр  $\varepsilon$  в качестве управляющего параметра. Постройте фазовые портреты для различных значений  $\varepsilon$ . Определите характер динамической системы, критические значения параметра  $\varepsilon$  и их физический смысл.

23) При условии, что расстройка частоты имеет второй порядок по  $\varepsilon$ , постройте резонансные кривые для осциллятора с квадратичной нелинейностью при наличии внешнего гармонического воздействия:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon^2 \beta \dot{x} + x + \varepsilon x^2 = \varepsilon^2 f \cos \omega t$$

24) Исследуйте отображение  $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$ . Постройте диаграммы Ламерея, найдите стационарные решения и циклы нескольких низших размерностей, а также соответствующие им критические значения управляющего параметра.

### Указания к выполнению расчётно – графических работ.

1. Не разрешается менять обозначения функций и параметров, данных в условии задачи. Количество новых обозначений должно быть минимальным и мотивированным. **Все вновь вводимые обозначения необходимо пояснять.**
2. При использовании асимптотических методов решения ДУ рекомендуется переходить к безразмерному аргументу, например,  $\tau = \omega t$  и т.п. Обратите внимание на то, что простота решения ДУ *может зависеть* от способа, которым вводится безразмерный аргумент.
3. В задачах по численному моделированию следует обращать внимание на параметры численного алгоритма (выбор процедуры, например, *rkf45*, величину шага и т.п.), а при графическом представлении решения – на выбор диапазона изменения координат, начальных точек фазовых траекторий и т.д.
4. При изложении результатов численного моделирования текст и расчеты сопровождайте фазовыми диаграммами и графиками временной зависимости фазовых переменных.
5. Перед тем, как приступить к построению графика, минимизируйте число свободных параметров: в формулах оставляйте только их безразмерные комбинации.

## Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций

### Этап: проведение текущего контроля успеваемости по дисциплине

Текущий контроль предназначен для проверки качества формирования компетенций, уровня овладения теоретическими и практическими знаниями, умениями и навыками. Оценивание знаний теоретического материала по каждому разделу проводится на практических занятиях. Умение решать задачи проверяется контрольной расчётно-графической работой (проверяется уровень сформированности компетенций ОК-6, ОК-7, ОПК-2).

### Критерии оценивания контрольных (расчётно-графических) работ

Отлично	Все задачи решаются полностью: приводится верное аналитическое решение, делается правильный расчет. Задачи компьютерного моделирования сопровождаются анализом полученных графиков и проверяются на соответствие с теорией
Хорошо	Приведены решения задач контрольной работы, но есть небольшие недочеты при использовании законов, формул, в целом не влияющих на ход решения, допущены ошибки при вычислении численных результатов. Общая доля невыполненных заданий не превышает 5–7 % от общего объема контрольной работы.
Удовлетворительно	Приведены решения не всех заданий контрольной работы, есть существенные недостатки при выводе аналитических выражений, не проведены численные расчеты. Имеются проблемы интерпретации полученных численных решений. Общая доля невыполненных заданий составляет не более 50 % от общего объема контрольной работы.
Неудовлетворительно	Решения заданий приведены неверно или вовсе отсутствуют. Общая доля невыполненных заданий составляет более 50 % от общего объема контрольной работы.

### Этап: проведение промежуточной аттестации по дисциплине

**Критерии оценки к зачёту (5 семестр):** оценка «не зачтено» ставится в случае получения студентом низшего значения критерия оценивания по любому из показателей оценивания. В остальных случаях ставится «зачтено». **Допуск к зачёту** осуществляется только после получения положительной оценки за РГР.

**Вопросы к зачёту (Компетенции, формируемые в процессе сдачи зачёта – это ОК-6, ОК-7 и ОПК-2)**

<b>Круг задач и примеры линейных и нелинейных систем</b>	
1. Примеры линейных уравнений физики из теории цепей, акустики, электродинамики.	ОК-7;
2. Нелинейная физика и нелинейные дифференциальные уравнения. Общие и частные методы решения линейных и нелинейных уравнений (сопоставление).	ОК-6; ОК-7

Источники нелинейности.	
3. Примеры физических систем, описываемых нелинейными ДУ. Уравнения Бюргерса, Кортевега – де-Фриза, система Лоренца.	ОК-7;
<b>Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний</b>	
4. Теория возмущений. Разложение по малому параметру (прямой метод). Секулярные члены и определение области применимости разложения.	ОПК-2;ОК-7
5. Метод перенормировки и метод Линдштедта - Пуанкаре на примере осциллятора Дюффинга. Эффекты ангармонизма при колебании математического маятника в поле тяжести.	ОПК-2;ОК-7
6. Метод многих масштабов в применении к системе Дюффинга.	ОПК-2;ОК-7
7. Разделение быстрых и медленных движений. Метод усреднения в применении к осциллятору Дюффинга.	ОПК-2;ОК-7
8. Точное решение для осциллятора Дюффинга. Эллиптический интеграл и его свойства. Сопоставление точного и приближенного решений.	ОПК-2;ОК-7
9. Общее рассмотрение одномерных нелинейных колебаний. Переменные действие-угол и интегрируемость.	ОПК-2;ОК-7
10. Теория возмущений для линейного гармонического осциллятора с затуханием. Сопоставление прямого разложения с точным решением. Особенности применения методики Линдштедта – Пуанкаре к ЛГО с затуханием.	ОПК-2;ОК-7
11. Метод многих масштабов и метод усреднения в применении к ЛГО с затуханием.	ОПК-2;ОК-7
<b>Системы с самовозбуждением. Автоколебания</b>	ОПК-2;ОК-7
12. Нелинейные колебания с самовозбуждением. Уравнения Рэля и Ван-дер-Поля. Сравнение системы Ван-дер-Поля и ЛГО с затуханием.	ОПК-2;ОК-7
13. Прямой метод и метод Линдштедта – Пуанкаре в применении к системе Ван-дер-Поля.	ОПК-2;ОК-7
14. Вынужденные колебания в нелинейных системах на примере осцилляторов Дюффинга и Ван-дер-Поля. Связь характера нелинейности со спектральной характеристикой отклика.	ОПК-2;ОК-7
15. Прямой метод и метод вариации постоянных в применении к системе Ван-	ОПК-2;ОК-7

дер-Поля. Характерные особенности поведения осциллятора Ван-дер-Поля при $t \rightarrow \infty$ . Пороговый характер возникновения автоколебаний. Бифуркация Андронова – Хопфа.	
<b>Основы теории динамических систем</b>	
16. Динамические системы. Гамильтоновы системы. Фазовое пространство. Необходимое условие «гамильтоновости» динамических систем и теорема Лиувилля.	ОПК-2;ОК-7
17. Автономные и неавтономные динамические системы. Исследование устойчивости решений (общая постановка задачи). Примеры автономных систем и способы приведения неавтономных систем уравнений к «автономному» виду.	ОПК-2;ОК-7
18. Устойчивость по Ляпунову. Показатели Ляпунова. Фазовые потоки, их свойства и разновидности. Инвариантные множества оператора эволюции автономных систем. Аттракторы. Понятие о «странных» аттракторах. Примеры	ОПК-2;ОК-7
19. Двумерные автономные фазовые потоки. Классификация особых точек Критерий возникновения бифуркации «фокус-седло».	ОПК-2;ОК-7
20. Система Лотки – Вольтерра и ее свойства в зависимости от значений управляющих параметров.	ОПК-2;ОК-7
21. Система Лоренца и ее моделирование в различных диапазонах значений параметров.	ОПК-2;ОК-7
<b>Метод дискретных отображений в теории динамических систем</b>	
22. Теорема А. Пуанкаре «о возврате». Отображение Пуанкаре для гамильтоновых систем. Функция последования и ее свойства. Бифуркация удвоения периода.	ОПК-2;ОК-7
23. Дискретные отображения и их использование в теории динамических систем. Диаграммы Ламерея. Примеры отображений.	ОПК-2;ОК-7
24. Особые точки дискретных отображений. Удвоение периода, хаос и универсальность Фейгенбаума.	ОПК-2;ОК-7
25. Двумерные отображения. Эргодичность и перемешивание (примеры отображений).	ОПК-2;ОК-7

### Методические рекомендации по подготовке к зачету.

*На зачете* подводится итог работы студента в течение семестра.

Подготовка к зачету требует определенного алгоритма действий. Прежде всего, необходимо ознакомиться с вопросами, которые выносятся на зачет. На основе этого

следует составить план повторения и систематизации учебного материала. Нельзя ограничиваться только конспектами лекций, следует проработать рекомендованные учебные пособия и литературу. В отдельной тетради на каждый вопрос следует составить краткий план ответа в логической последовательности и с фиксацией необходимого иллюстративного материала (примеры, рисунки, схемы, цифры).

Если отдельные вопросы программы остаются неясными, их необходимо написать на полях конспекта, чтобы выяснить на консультации. Важнейшую информацию следует обозначать другим цветом, это помогает лучше ее запомнить.

Следует постепенно переходить от повторения материала одной темы к другой. Когда повторен и систематизирован весь учебный материал, необходимо пересмотреть его еще раз уже со своими записями, проверяя мысленно, как усвоен материал.

### **Условия допуска студента к зачету**

Для того, чтобы быть допущенным к сдаче экзамена, студенту необходимо выполнить следующие требования:

- 1) регулярно посещать аудиторные занятия по дисциплине (пропуск занятий не допускается без уважительной причины); в случае пропуска занятия студент должен быть готов ответить на вопросы преподавателя, относящиеся к пропущенной теме;
- 2) выполнить контрольные работы на оценку «отлично», «хорошо» или «удовлетворительно», провести анализ ошибок контрольной работы.

### **Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания**

#### **Этап: Проведение текущего контроля успеваемости**

Результаты текущего контроля знаний оцениваются по двухбалльной шкале с оценками:

- «аттестован»;
- «не аттестован».

Оценка	Критерий оценивания
Аттестован	Студент аттестован, если он выполнил не менее 70% заданий по дисциплине (самостоятельная работа, домашние задания, контрольная работа), демонстрирует достаточный уровень усвоения знаний
Не аттестован	Студент не аттестован, если он выполнил менее 70% заданий по дисциплине (самостоятельная работа, домашние задания, контрольная работа), демонстрирует низкий уровень усвоения знаний, имеет пропуски без уважительной причины более 5%.

#### **Этап: Проведение промежуточной аттестации (5 семестр)**

Результаты промежуточного контроля знаний оцениваются по двухбалльной шкале с оценками:

- «зачтено»;
- «незачтено»;

Дескриптор компетенции	Показатель оценивания	Оценка	Критерий оценивания

Знает	<ul style="list-style-type: none"> <li>- примеры физических систем, описываемых линейными и нелинейными ДУ, физические причины, приводящие к нелинейности;</li> <li>- основы приближённых методов нахождения решений нелинейных ОДУ;</li> <li>- классификацию особых точек двумерных фазовых потоков;</li> <li>- основные свойства дискретных отображений (эффект удвоения периода, универсальность Фейгенбаума и т.д.);</li> <li>- электронные источники научной и научно-популярной периодики, а также электронные библиотеки препринтов, находящиеся в открытом доступе.</li> </ul>	зачтено	<ul style="list-style-type: none"> <li>- теоретическое содержание усвоено не менее, чем на 90%;</li> <li>- на 100% проведён анализ ошибок контрольной работы;</li> <li>- отвечает на вопрос при видеоизменении заданий;</li> </ul>
		Не зачтено	<ul style="list-style-type: none"> <li>теоретическое содержание усвоено в объёме менее, чем на 50%;</li> <li>анализ ошибок контрольной работы проведён менее, чем на 50%;</li> </ul>
Умеет	<ul style="list-style-type: none"> <li>- применять методы теории возмущений для нахождения приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений, практически использовать такие понятия, как устойчивость по Ляпунову, предельный цикл, бифуркация, фазовый портрет и т.д.;</li> <li>- определять тип особой точки в двумерном случае;</li> <li>- проводить расчёты с использованием современных методов компьютерного моделирования динамических систем;</li> <li>- осуществлять поиск необходимой информации и её хранение в каталогизированной форме;</li> <li>- пользоваться учебной и научной литературой для профессиональной деятельности.</li> </ul>	зачтено	<ul style="list-style-type: none"> <li>- наличие практических умений в объёме не ниже 90%</li> </ul>
		Не зачтено	<ul style="list-style-type: none"> <li>- наличие перечисленных умений в объёме ниже, чем 60%.</li> </ul>
Владеет	<ul style="list-style-type: none"> <li>- техникой асимптотических вычислений;</li> <li>- прикладными пакетами программ, моделирующими фазовые потоки;</li> <li>- методами визуализации результатов вычислений;</li> <li>- методами анализа качества информации, получаемой из сети интернет.</li> </ul>	зачтено	<ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками решения элементарных дифференциальных уравнений;</li> <li>- техникой вычислений и методами анализа;</li> <li>- навыками написания программ в одном из специализированных математических пакетов (MathLab, Maple, Matematica etc.).</li> </ul>
		не зачтено	<ul style="list-style-type: none"> <li>студент не владеет техникой вычислений и методами математического анализа;</li> </ul>

В качестве текущего средства контроля успеваемости предусмотрена одна контрольная расчётно-графическая работа, выполняемая в течение семестра и устный опрос; **промежуточным** средством контроля является **зачёт** (5 семестр). Курсовая работа учебным планом не предусмотрена. Учебно-методическое сопровождение самостоятельной работы рассчитано на



использование студентами книг и учебников из списка как основной, так и дополнительной литературы. Допуск к зачету осуществляется только после сдачи РГР.