Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине

Физическая кинетика, 8 семестр

Код, направление подготовки	03.03.02
Направленность (профиль)	Цифровые технологии в геофизике
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Кафедра экспериментальной физики
Выпускающая кафедра	Кафедра экспериментальной физики

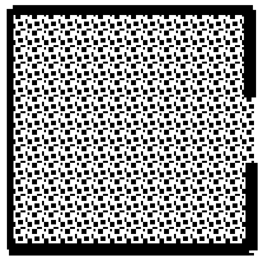
Типовые задания для контрольной работы:

1. Какие соображения позволяют совместить фундаментальное утверждение теоремы возврата А. Пуанкаре и наблюдаемую на опыте необратимость процессов релаксации?
2. Рассмотрите идеальный газ в сосуде, разделённом перегородкой с отверстием на две неравные части. Используя биномиальное распределение и принцип Больцмана, покажите, что равновесному состоянию отвечает состояние с одинаковой концентрацией молекул в двух частях сосуда.
3. Используя фундаментальное решение уравнения диффузии, определите функцию распределения вероятности найти броуновскую частицу на расстоянии r от некоторой начальной точки через промежуток времени t после начала движения.

4. Подсчитайте число различных микросостояний для системы из двух тождественных фермионов, энергии которых могут принимать только два значения ε_1 и ε_2 с кратностями вырождения $\nu_{\varepsilon_1} = 4$ и $\nu_{\varepsilon_2} = 2$ соответственно (то есть фермионы можно распределять по двум «ящикам» с числом «ячеек» 4 и 2 соответственно). Как изменится ответ, если частицы не тождественны? Совпадёт ли этот ответ со статистическим весом системы двух классических и одинаковых частиц («биллиардных шаров»)?
5. Промоделируйте дискретное отображение «кошка Арнольда» на компьютере, взяв в качестве «объёма» квадрат $(0,1)\times(0,1)$. Продемонстрируйте возникновение «динамического хаоса», взяв начальные координаты 20 – 30 точек достаточно близкими друг к другу.

6. Покажите, что спектральная характеристика одномерного случайного процесса с $\delta-$ образной корреляционной функцией соответствует представлению о «белом шуме».
7. Укажите основные временные и пространственные масштабы, а также соотношения между ними в случае, если броуновская частица движется в газе или жидкости.

8. Запишите уравнение Ланжевена для броуновской частицы, находящейся в поле тяжести. Как изменяется средний квадрат её удаления от произвольной начальной точки с течением времени? Сохранится ли равенство: $< x^2 > \propto t$?
9. Адсорбированные на поверхности воды молекулы нерастворимого поверхностно активного вещества могут образовывать двумерный максвелловский газ. Допустим, что этот газ заключён в «сосуд», в стенке которого имеется небольшая одномерная «щель». Найти функцию распределения вылетающих через эту щель частиц и с её помощью определить их среднюю кинетическую энергию.



10. Выясните, являются ли флуктуации давления и температуры в идеальном газе независимыми. Каков будет ответ, если в качестве газа взять равновесный фотонный газ (тепловое излучение)?
11. Являются ли флуктуации энтропии и давления независимыми? Рассмотрите в качестве примера идеальный газ (фотонный газ).
12. Приведите примеры уравнений линейной термодинамики необратимых процессов и укажите в каждом конкретном случае физический смысл обобщённых «потоков» и «сил».

13. Используя распределение Больцмана, вычислить среднеквадратичную дисперсию потенциальной энергии молекулы, обладающей фиксированным магнитным моментом μ, если парамагнитный газ помещен во внешнее магнитное поле с индукцией *B*. [Указание: используйте соотношение $\left\langle (\Delta W_П)^2 \right\rangle = \left\langle W_П^2 \right\rangle - \left\langle W_П \right\rangle^2$, $W_\Pi = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$].
14. Используя определение длины свободного пробега и числа столкновений молекул в единицу времени, определить зависимость этих параметров от давления, если газ сжимали адиабатически.

15. Покажите, что в случае идеального одноатомного газа интеграл столкновений Больцмана обращается в нуль, если функция распределения атомов по скоростям совпадает с максвелловской.
16. Рассмотрите распределение Бернулли и, указав соответствующие асимптотические условия, покажите, как на его основе можно получить распределение Пуассона и распределение Гаусса.

17. Идеальный равновесный пространственно однородный классический газ из N частиц находится в объёме V. Определить вероятность обнаружить N_1 частиц в объёме $V_1 < V$. Рассмотреть предельные случаи $N_1 \ll N$ и $1 \ll N_1 \ll N$.
18. Определить относительную флуктуацию давления равновесного электромагнитного излучения, заполняющего полость объёма V, при температуре T. (Используйте планковскую функцию распределения).
19. На основе кинетического уравнения Больцмана получить барометрическую формулу Больцмана для концентрации идеального газа в однородном поле тяжести. Считать атмосферу изотермической. Подсказка: учесть, что в равновесном состоянии интеграл столкновений обращается в ноль.
20. Используя 2-частичную максвелловскую функцию распределения, найти функцию распределения молекул по *относительным* скоростям. Указание: произвести замену переменных, введя вместо скоростей двух частиц две другие скорости – скорость центра масс и относительную скорость.

21. Идеальный газ сжимают изотермически. Определить характер зависимости длины свободного пробега и средней частоты столкновений в единице объёма от давления.
22. Идеальный газ нагревают изобарически. Определить характер зависимости длины свободного пробега и средней частоты столкновений в единице объёма от температуры.
23. Получить функцию распределения по скоростям для молекул, вылетающих в вакуум через небольшое отверстие в тонкостенном сосуде.
24. Показать, что решением уравнения Фоккера – Планка для свободной броуновской частицы, движущейся в одном измерении, является фундаментальное решение уравнения диффузии. Вычислить средний квадрат удаления броуновской частицы от начального положения с помощью функции распределения Фоккера – Планка.

Задача. Рассмотрите идеальный газ в сосуде, разделённом перегородкой с отверстием на две неравные части. Используя биномиальное распределение и принцип Больцмана, покажите, что равновесному состоянию отвечает состояние с одинаковой концентрацией молекул в двух частях сосуда.

Решение. Пусть объём одной части сосуда равен V_1, а второй V_2, причём $V_1 \neq V_2$ и $V_1 + V_2 = V$. Вероятность одной молекуле попасть в первую часть сосуда равна $p = V_1/V$, а во вторую - $q = \frac{V_2}{V}$, $p + q = 1$. Нам необходимо определить вероятность произвольного неравновесного состояния, когда в первой части сосуда имеется N_1 частиц, а во второй – $N_2 = N - N_1$. Общее число частиц N считается фиксированным. Так как макроскопические свойства системы не должны зависеть от того, какие именно частицы выбраны для заполнения объёмов, то вероятность появления выборки из N_1 частиц в первом объёме и, одновременно, N_2 частиц во втором объёме будет в силу независимости этих событий равна $p^{N_1}q^{N_2}$. Осталось определить общее число таких выборок. Оно, очевидно, определяется числом сочетаний $C_N^{N_1}$ из N по N_1 (или по N_2, так как $C_N^{N_1} = C_N^{N_2} = \frac{N!}{N_1!\,N_2!}$) . Таким образом, вероятность указанного распределения частиц по сообщающимся частям сосуда равна $W(N_1|N) = C_N^{N_1}p^{N_1}q^{N_2}$. Согласно Больцману, равновесному состоянию отвечает такая конфигурация, вероятность которой максимальна. Предполагая числа N_1 и N_2 макроскопически большими, воспользуемся формулой Стирлинга для представления логарифма $W(N_1|N)$ в виде непрерывной функции

$$\ln\big(W(N_1|N)\big) = const - N_1\ln(N_1) + N_1 - (N - N_1)\ln(N - N_1) + N - N_1 \ .$$

Находим производную этой функции по N_1 и, приравнивая её к нулю, получаем окончательно:

$$\ln\left(\frac{pN_2}{qN_1}\right) = 0 \ .$$

Таким образом, условию максимальности вероятности соответствует равенство концентраций молекул в двух сообщающихся частях сосуда, т.е. $N_1/V_1 = N_2/V_2$.

Задача. На основе кинетического уравнения Больцмана получить барометрическую формулу Больцмана для концентрации идеального газа в однородном поле тяжести. Считать атмосферу изотермической. Подсказка: учесть, что в равновесном состоянии интеграл столкновений обращается в ноль.

Решение. Пусть $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ обозначает одночастичную функцию распределения. В кинетическом уравнении Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla f + \vec{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{col}$$

сила $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{g}$. В равновесии функция распределения $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ от времени не зависит (то есть $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$), интеграл столкновений в правой части обращается в ноль, а зависимость от координат и импульсов факторизуется: $f = f_M(\vec{\boldsymbol{p}})\boldsymbol{n}(\vec{x})$. Последнюю формулу легко понять, если учесть, что в изотермической атмосфере в слоях газа на разных высотах распределение по скоростям – максвелловское. Тем самым распределения по скоростям и по координатам – независимы. Учтём теперь, что

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \; f_M(\vec{\boldsymbol{p}}) = const \cdot exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) \text{ и } n(\vec{x}) = n(z) \quad .$$

Для концентрации $n(z)$ получаем уравнение:

$$v_z f_M \frac{\partial n}{\partial z} - mgn(z)\frac{\partial f_M}{\partial p_z} = 0.$$

Таким образом, $v_z \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{p_z}{kT} gn(z) = 0$. Так как $p_z = mv_z$, получаем: $n(z) = n(0)\exp(-\beta mgz)$, где $\beta \equiv 1/kT$.

Задача. Идеальный газ сжимают изотермически. Определить характер зависимости длины свободного пробега и средней частоты столкновений в единице объёма от давления.
Решение. Число столкновений молекулы в единицу времени

$$\nu = 2nd^2\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2kT}{\mu}} \; ,$$

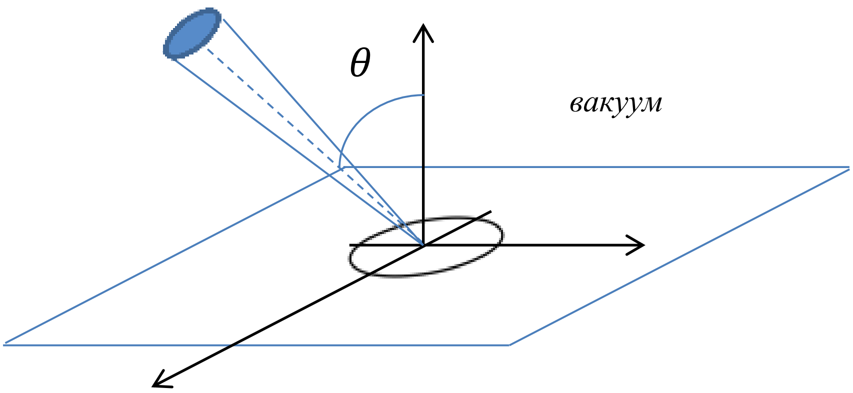
где n, d, μ – концентрация молекул, их диаметр и приведённая масса соответственно. Длина свободного пробега $\ell = 1/n\pi d^2\sqrt{2}$. При изотермическом процессе имеем $n \propto p$. Отсюда получаем:

$$\nu \propto p \, , \;\; \ell \propto \frac{1}{p} .$$

Задача. Определить функцию распределения по скоростям для молекул, вылетающих в вакуум через небольшое отверстие в тонкостенном сосуде.
Решение. Вначале необходимо определить число молекул, вылетающих через отверстие в единицу времени в заданном направлении. Направление зададим элементом телесного угла, вершина которого расположена в центре отверстия. Используем сферическую систему координат. В сферической системе координат максвелловская функция распределения определяет вероятность $dW(v,\theta,\varphi)$ того, что находящаяся внутри сосуда частица обладает заданным значением скорости

$$dW(v,\theta,\varphi) = f_M(v,\theta,\varphi)d^3\vec{v} = const \cdot exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^2 dv d\Omega \, ,$$

где $d\Omega = \sin(\theta)\, d\theta d\varphi$ – элемент телесного угла. Построим наклонный цилиндр, роль



основания в котором играет отверстие в стенке сосуда, а все образующие параллельны направлению, задаваемому бесконечно малым телесным углом. Цилиндр располагается ***внутри*** сосуда. Выберем длину образующей цилиндра, равную $v\Delta t$. Тогда все частицы, попавшие внутрь цилиндра и двигающиеся в выбранном направлении, за промежуток времени Δt пройдут через отверстие (промежуток Δt выбирается настолько малым, чтобы столкновения между частицами, оказавшимися в цилиндре, можно было не учитывать). Объём цилиндра равен $\Delta S\cos(\theta)\upsilon\Delta t$, полное число частиц в нём равно $n\Delta S\cos(\theta)\upsilon\Delta t$ ($n -$ концентрация молекул, $\Delta S -$ площадь отверстия); из них

$$dN(\upsilon,\theta,\varphi) = n\Delta S\cos(\theta)\upsilon\Delta t\cdot dW(\upsilon,\theta,\varphi)$$

частиц обладают заданным модулем и направлением скорости. Отсюда находим полное число частиц, вылетающих за время Δt через отверстие площадью ΔS:

$$N = n\Delta S\,\Delta t\int_0^{\infty} d\upsilon\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\upsilon^3\cos(\theta)\sin(\theta)\cdot const\cdot exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right) =$$

$$= const\cdot n\Delta S\,\Delta t\,2\pi\left(\frac{kT}{m}\right)^2 .$$

Функция распределения вылетающих через отверстие молекул по скоростям определяется тогда, как

$$\frac{dN(\upsilon,\theta,\varphi)}{N} = w(\upsilon,\theta,\varphi)d\upsilon d\theta d\varphi = \frac{m^2}{2\pi(kT)^2}\,\upsilon^3\sin(\theta)\cos(\theta)\,exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)d\upsilon d\theta d\varphi .$$

Типовые вопросы к зачёту:

1. Основные положения метода Гиббса. Неравновесные состояния с точки зрения метода Гиббса. Эргодическая гипотеза. Теорема возврата А. Пуанкаре. Проблема микроскопического обоснования термодинамики.

2. Время релаксации. Временные и пространственные масштабы, используемые при описании неравновесного состояния. Неравновесные функции распределения. Идея Н. Боголюбова об уменьшении числа параметров, необходимых для задания неравновесного состояния.

3. Основные статистические характеристики случайных процессов. Корреляционные функции и независимость случайных величин. Пространственно-временные корреляции и их Фурье-образы.

4. Термодинамические флуктуации. Функция распределения для флуктуаций основных термодинамических параметров. Закон $\delta a / a \sim 1/\sqrt{N}$ для относительных флуктуаций.

5. Процессы переноса (примеры). Обобщённые термодинамические силы и потоки. Кинетические коэффициенты. Уравнения теплопроводности и диффузии.

6. Фундаментальное решение уравнения диффузии. Задача Коши и её решение.

7. Уравнения линейной термодинамики необратимых процессов. Соотношения Онзагера. Принцип минимума производства энтропии.

8. Критерий эволюции Гленсдорфа – Пригожина. Примеры неравновесных термодинамических систем с самоорганизацией.

9. Распределение частиц, вылетающих через отверстие в сосуде, по скоростям. Двумерные распределения Максвелла.

10. Распределение частиц по относительным скоростям. Длина свободного пробега для равновесного идеального газа.

11. Уравнение Ланжевена для броуновской частицы. Зависимость среднего квадрата смещения от времени. Опыты Перрена.

12. Диффузия как случайный процесс. Фундаментальное решение уравнения диффузии как функция распределения вероятностей координат броуновской частицы. Понятие об уравнении Фоккера – Планка.

13. Броуновское движение осциллятора. Теорема Найквиста. Тепловой шум.

14. Электропроводность в модели Друде. Закон Видемана – Франца.

15. Задача рассеяния в классической механике. Основные параметры рассеяния. Сечение. Обратимость во времени.

16. Число столкновений в единице объёма в единицу времени. Интеграл (парных) столкновений для разрежённого газа.

17. Кинетическое уравнение Больцмана. Стационарное решение уравнения Больцмана.

18. $H -$ теорема Больцмана и эволюция неравновесного состояния.