Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине

Интегральные уравнения и вариационное исчисление, 4 семестр

Код, направление подготовки	03.03.02
Направленность (профиль)	Цифровые технологии в геофизике
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Кафедра экспериментальной физики
Выпускающая кафедра	Кафедра экспериментальной физики

Типовые задания для контрольной работы:

1. Решить задачу вариационного исчисления:
$$J(y)=\int_0^{\pi}\left(y''^2-y^2\right)dx\to extr;\qquad y(0)=y'(0)=y(\pi)=y'(\pi)=0.$$
2. Решить задачу вариационного исчисления:
$$J(y)=\int_0^1 e^x\left(y^2+\frac{1}{2}y'^2\right)dx\to extr;\qquad y(0)=1;\qquad y(1)=e.$$
3. Решить задачу вариационного исчисления:
$$J(y)=\int_0^1 (x+1)y''^2dx\to extr;\qquad y(0)=y'(0)=0;\quad y(1)=1;\quad y'(1)=2.$$
4. Решить задачу вариационного исчисления:
$$J(y)=\int_0^1 e^y y'^2dx\to extr;\qquad y(0)=0;\quad y(1)=\ln 4.$$
5. Найти допустимые экстремали изопериметрической задачи:
$$\int_{-1}^{1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx\to extr;\qquad \int_{-1}^{1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=1;\qquad y(-1)=y(1)=0.$$
6. Среди кривых длины $L=10\arcsin\frac{3}{5}$, соединяющих точки A(-3,0) и B(3,0) и лежащих выше оси абсцисс, определить ту, которая вместе с отрезком AB ограничивает наибольшую площадь.

7. Найти допустимые экстремали изопериметрической задачи:
$$\int_0^{\pi/2}\left(y'^2-y^2\right)dx\to extr;\quad \int_0^{\pi/2} y\sin x\,dx=1;\quad y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$
8. Решить задачу на условный экстремум:
$$J(y,z)=\int_0^1\left(y^2+2y'^2+z'^2\right)dx,$$
$$y(0)=1,\ z(0)=0,\ y(1)=e+e^{-1},\ z(1)=2e-e^{-1},\ y'-z=0.$$

9. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений:

$$y(x) = \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{t^3}}\, y(t)dt + x^{3/2}$$

10. Найти итерированные ядра указанного ядра:

$$K(x,t) = x + \sin t, \qquad a = -\pi, \qquad b = \pi$$

11. Найти резольвенту ядра:

$$K(x,t) = xe^t; \qquad a = -1, \quad b = 1.$$

12. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t \sin x\; y(t)dt + \cos x$$

13. Показать, что функция $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ является решением интегрального уравнения Вольтерры:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+x^2} dt\ .$$

.

14. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерры с ядром $K(x,t) = 1.$

15. Показать, что функция φ является решением интегрального уравнения Вольтерры:

$$\varphi(x) = xe^x; \qquad \varphi(x) = e^x \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt.$$

16. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерры с ядром $K(x,t) = x - t.$

Типовые вопросы к зачету:

Задание для показателя оценивания дискриптора ***«Знает»***	Вид задания и формируемые компетенции
Сформулируйте развернутые ответы на следующие теоретические вопросы (при необходимости продемонстрируйте вывод уравнений и доказательства теорем): 1. Примеры задач вариационного исчисления. 2. Определение функционала. 3. Основные леммы вариационного исчисления. 4. Уравнение Эйлера. 5. Определение вариации. 6. Варианты уравнения Эйлера для функций от различных аргументов. 7. Уравнение Эйлера для случая нескольких функций. 8. Примеры изопериметрических задач. 9. Необходимые условия экстремума. 10. Примеры проблем, приводящих к задачам на условный	- теоретический ОПК-1.1 ОПК-1.3

экстремум. 11. Необходимые условия экстремума. 12. Определение второй вариации 13. Условия Лежандра 14. Уравнение Якоби 15. Определение вида интегрального уравнения. 16. Примеры задач, приводящих к интегральным уравнениям. 17. Классификация интегральных уравнений. 18. Элементы функционального анализа: метрические, линейные, банаховы и гильбертовы пространства. Определения и примеры. 19. Ограниченные операторы. Понятие нормы оператора. Примеры. 20. Теорема о сжимающем отображении. 21. Метод последовательных приближений 22. Определение итерированного ядра. 23. Метод итерированных ядер. 24. Определение резольвенты. 25. Определение и свойства вырожденного ядра. 26. Метод решения уравнений с вырожденным ядром. **27.** Преобразование Лапласа и его свойства. 28. Теорема о свёртке для преобразования Лапласа. Решение уравнений Вольтерра второго рода с помощью теоремы о свёртке.	

Задание для показателя оценивания дискриптора «Умеет»	Вид задания и формируемые компетенции
26. Простейшая задача классического вариационного исчисления. 27. Привести пример задачи классического вариационного исчисления со старшими производными. 28. Привести пример задачи классического вариационного исчисления с двумя степенями свободы. 29. Привести пример задачи на условный экстремум. 30. Решить изопериметрическую задачу. 31. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом последовательных приближений. 32. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом итерированных ядер. 33. Найти итерированные ядра для заданного ядра. 34. Найти резольвенту для заданного ядра. 35. Решить интегральное уравнение Вольтерра методом последовательных приближений.	- практический ОПК-1.1 ОПК-1.3

Задание для показателя оценивания дискриптора «Владеет»	Вид задания и формируемые компетенции
36. Решить простейшую задачу классического вариационного исчисления. 37. Решить задачу классического вариационного исчисления со старшими производными. 38. Решить простейшую задачу классического вариационного	Практический ОПК-1.1 ОПК-1.3

исчисления с двумя степенями свободы. 39. Решить задачу на условный экстремум. 40. Решить изопериметрическую задачу. 41. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом последовательным приближений. 42. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом итерированных ядер. 43. Найти итерированные ядра для заданного ядра. 44. Найти резольвенту для заданного ядра. 45. . Решить интегральное уравнение Вольтерра методом последовательных приближений. 46. Решить уравнение Вольтерра с применением теоремы о свёртке для преобразования Лапласа.	

Типовые практические задания к зачету:

1. Найти решение вариационной задачи $\delta J[x(\cdot)] = 0$, $x(0) = 0$, $x(t_1) = x_1$, где

$$J[x(\cdot)] = \int_0^{t_1} \left[(1+t^2)(x')^2 + t^2 x x' + t x^2 \right] dt \ .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом (каким?) функционала $J[x()]$.

2. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)] = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, где

$$J[y(\cdot)] = \int_0^{\pi} \left[(y' + y)^2 + 2y \sin x \right] dx \ .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом (каким?) функционала $J[y()]$.

3. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)] = 0$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1 - \ln 2$, где

$$J[y(\cdot)] = \int_1^2 \left[x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y \ln x}{x} \right] dx \ .$$

Реализуется ли экстремум функционала $J[y()]$ на полученном решении?

4. Найти решение вариационной задачи $\delta J[z(\cdot)] = 0$, $z(0) = 4/5$, $z(\pi/2) = e^{\pi}$, где

$$J[z(\cdot)] = \int_0^{\pi/2} \left[(z')^2 + 4z^2 + 2z \cos x \right] dx \ .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом $J[z(\cdot)]$.

5. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)] = 0$, $y(0) = 1$, $y(1/2) = 2$, где

$$J[y(\cdot)]=\int\limits_0^{1/2}\left[\frac{(y')^2}{x^2-1}-\frac{2y^2}{(x^2-1)^2}\right]dx\ .$$

Реализуется ли экстремум функционала $J[y()]$ на полученном решении?

$\delta J[z(\cdot)]=0 \qquad z(0)=0,$

6. Найти решение вариационной задачи, $z\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sinh^3(\pi/4)+\sinh\left(\frac{\pi}{4}\right)$, где

$$J[z(\cdot)]=\int\limits_0^{\pi/4}\left[zz'\arctan x-(z')^2+\frac{z^2}{2(1+x^2)}-9z^2+16z\sinh x\right]dx\ .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом $J[z(\cdot)]$.

7. Найти решение вариационной задачи $\delta J[z(\cdot)]=0$, $z(1)=-2$, $z(3)=2$, где

$$J[z(\cdot)]=\int\limits_1^{3}\left[2\sqrt{x}(z')^2+\frac{z^2}{x\sqrt{x}}-\frac{8z'}{x\sqrt{x}}\right]dx\ .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом $J[z(\cdot)]$.

8. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)]=0$, $y(0)=1$, $y(1)=e^{-1}$, где

$$J[y(\cdot)]=\int\limits_0^{1}\left[\frac{(y')^2}{y^2}-xy'-y\right]dx\ .$$

Реализуется ли экстремум функционала $J[y()]$ на полученном решении?

9. Найти решение вариационной задачи $\delta J[y(\cdot)]=0$, $y(1)=3$, $y(2)=2$, где

$$J[y(\cdot)]=\int\limits_1^{2}\left[y'e^y+x^4(y')^3\right]dx\ .$$

Реализуется ли экстремум функционала $J[y(\cdot)]$ на полученном решении?

10. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)]=\int\limits_0^1[2zz'+(z')^2]dx$, если

$z(0)=z(1)=0$, а связь имеет вид: $\int\limits_0^1[4xz'+zz']dx=4$.

11. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)]=\int\limits_0^1[zz'+2(z')^2]dx$, если

$z(0)=z(1)=0$, а связь имеет вид: $\int\limits_0^1[-8xz'+zz']dx=8$.

12. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)]=\int\limits_0^\pi[z^2+(z')^2+2z\cos x]dx$, если

$z(0)=2,\ z(\pi)=-2$, а связь имеет вид: $\int\limits_0^\pi z\cos x\,dx=\pi$.

13. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)]=\int\limits_0^{\pi}[2z+3z'+(z')^2]dx$, если

$z(0)=0,\ z(\pi)=\pi^2$, а связь имеет вид: $\int\limits_0^{\pi} z\sin x\, dx=\pi^2-1$.

14. Найти условный экстремум функционала $J[z(\cdot)]=\int\limits_0^{1}[2xz+(z')^2]dx$, если

$z(0)=0,\ z(1)=3,$ а связь имеет вид: $\int\limits_0^{1} zx\, dx=1$.

15. Используя аксиомы гильбертова пространства, доказать неравенство Шварца:

$$\|\chi\|\|\psi\|\geq|(\chi,\psi)|\ .$$

16. Используя аксиомы гильбертова пространства, доказать неравенство Минковского:

$$\|\chi\|+\|\psi\|\geq\|\chi+\psi\|.$$

17. Доказать, что пространство $\mathcal{L}=\left\{\psi:\psi=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{pmatrix}\right\}$ последовательностей образует метрическое пространство, если расстояние между любыми двумя элементами $\psi,\chi\in\mathcal{L}$ задаётся функцией

$$\rho(\psi,\chi)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\frac{|a_n-b_n|}{1+|a_n-b_n|}\ .$$

Можно ли, сохранив метрическую функцию, превратить пространство $\mathcal{L}$ в банахово (то есть в линейное нормированное пространство), определив в нём операции сложения и умножения на числа?

18. Пусть $\mathcal{H}$ - гильбертово пространство и пусть $\{\psi_1,\ \psi_2,\cdots,\ \psi_n\}$ - система попарно ортогональных векторов. Показать: а) что векторы этой системы линейно независимы; б) что если $\phi=\sum\limits_1^n c_k\psi_k$ - произвольная суперпозиция этих векторов, то

$$\|\phi\|^2=\sum_1^n|c_k|^2\|\psi_k\|^2\ .$$

19. Постройте пример непрерывной функции, у которой первая и вторая производные непрерывны в некоторой точке, а третья имеет разрыв (первого или второго рода).

20. Рассмотрите оператор $\hat{C}_f:C[0,1]\to C[0,1],\quad (\hat{C}_f\psi)(x)=\psi(f(x))$, где $f:[0,1]\to[0,1]$ - заданная дифференцируемая монотонная функция с ограниченной производной. Покажите, что оператор $\hat{C}_f$ - ограниченный, и найдите его норму. В пространстве $C[0,1]$ использовать норму $\|...\|_1$.

21. Оператор «взвешенного сдвига» $\hat{T}:\ \ell_2\to\ell_2$ определяется согласно условию

$$\hat{T}\psi=\hat{T}(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(a_1x_2,\ a_2x_3,\ a_3x_4,\cdots)\ ,$$

где числа $a_1,\ a_2,\ a_3,...$ - «веса». Найти условие, которому должны удовлетворять веса, чтобы оператор $\hat{T}$ был ограниченным. Определить норму $\hat{T}$.

22. Пусть интегральный оператор $\hat{A}: C[0,1] \to C[0,1]$ имеет вид: $(\hat{A}\psi)(x) = \int_0^x t\psi(t)dt$.

Показать, что этот оператор ограничен, если в $C[0,1]$ используется sup− норма (то есть норма $\|...\|_\infty$), и сравнить $\|\hat{A}\|$ с $\|\hat{A}^2\|$. Можно ли на основе полученного сравнения сделать вывод о сжимающем характере отображения, задаваемого оператором $\hat{A}$?

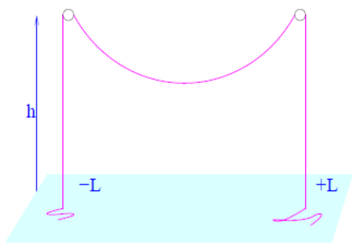
23. Доказать, что линейный оператор является ограниченным тогда и только тогда, когда он непрерывен.

24. Доказать, что если линейный оператор непрерывен в некоторой точке ψ_0 банахового пространства, то он непрерывен и во всей области определения этого оператора.

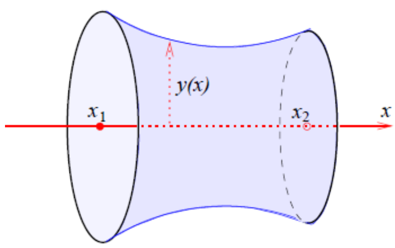
25. Пусть интегральный оператор $\hat{A}: C[0,1] \to C[0,1]$ имеет вид: $(\hat{A}\psi)(x) = \int_0^x \psi(t)dt$.

Показать, что если $(\hat{A}\psi)(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$, то $\psi(x) = 0$.

26. Найти форму «кривой прогиба» шнура, свободно перекинутого через два блока. Трение в блоках отсутствует. Указание: минимизируйте потенциальную энергию шнура. Обратите внимание на то, что натяжение в точках подвеса определяется весом свисающей части шнура и, следовательно, постоянно.



27. Мыльная плёнка натянута на два коаксиальных кольца радиусами y_1 и y_2. Свободная энергия F мыльной плёнки пропорциональна площади её поверхности: $F = \sigma S$, $\sigma -$ коэффициент поверхностного натяжения. Принимая, что в положении равновесия свободная энергия минимальна, определить форму поверхности. Указание: эффектами гравитации пренебречь и использовать тот факт, что в этом случае плёнка принимает форму поверхности вращения.



28. Нерастяжимый шнур длины ℓ закреплён на двух опорах в точках A_1 и A_2, расположенных на одинаковой высоте. Расстояние $A_1A_2 = L < \ell$. Определить форму кривой.

29. Доказать, что ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве и обладающий всюду плотной областью определения, замыкаем.

30. Пусть $\hat{A}$ - интегральный оператор Вольтерры, $\hat{A}: C[a,b] \to C[a,b]$,

$$(\hat{A}\psi)(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\psi(t)dt + \Phi_0(x)\,,\ \ a \le x \le b\,.$$

Функция $\Phi_0(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $K(x,t)$ - в квадрате $[a,b]\times[a,b]$.

Показать, что отображение, задаваемое таким оператором, будет сжимающим. Подсказка: используйте ограниченность ядра.

31. Рассмотрите последовательность функций $\left\{x^n\right\}_{n=0}^{n=\infty}$. Покажите, что эта последовательность не является сходящейся (к какой функции?) в пространстве $C[0,1]$ по $\sup-$ норме, но сходится по норме $\|...\|_1$.

32. Рассмотрите в качестве линейного нормированного пространства вещественную плоскость $\mathbb{E}_2$. Укажите множество точек на этой плоскости, которые соответствуют «единичному шару» $\|\psi\| \le 1$, $\psi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, для трёх вариантов норм: $\|...\|_1$, $\|...\|_2$ и $\|...\|_\infty$.

33. Рассмотрите последовательность функций $\left\{ f_n(x)\right\}_{n=0}^{n=\infty}$ из $C[0,1]$, определяемую согласно равенству:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx\,,\ \ 0 \le x \le \dfrac{1}{n}\,; \\ 0\ \ ,\qquad \dfrac{1}{n} \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Проверьте, что $\| f_n \|_\infty = 1\ \ \forall n$, в то время как $\| f_n \|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3n}} \to 0$. Какой вывод на основании этого факта можно сделать о свойствах последовательностей функций в разных банаховых пространствах?

34. Найти решение интегрального уравнения:

$$f(x) = x^3 + \int_0^\pi \sin(x-t)\,f(t)dt\,.$$

35. Найти решение интегрального уравнения:

$$f(x) = x^2 + \int_0^\pi \cos(x-t)\,f(t)dt\,.$$

36. Решить систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \displaystyle\int_0^t y(\tau)d\tau\,, \\ y(t) = t + \displaystyle\int_0^t z(\tau)d\tau\,, \\ z(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t x(\tau)d\tau\,. \end{cases}$$

37. Решить систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = t + \int\limits_0^t y(\tau)d\tau \,, \\ y(t) = 1 + \int\limits_0^t x(\tau)d\tau \,. \end{cases}$$

38. Найти решение уравнения Вольтерры первого рода:

$$\Phi_0(x) = \int\limits_0^x \ln(x/\tau)\, f(\tau)d\tau \,,$$

в котором $\Phi_0(x)$ - заданная функция.

39. Найти решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\psi(x) = \chi(x) + \int\limits_0^1 (xy^3 + x^3 y)\psi(y)dy \,,$$

выразив его через моменты заданной функции $\chi(x)$.