Оценочные материалы для промежуточной аттестации по дисциплине

Инженерная математика, 2 семестр

Код, направление подготовки	11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи
Направленность (профиль)	Корпоративные инфокоммуникационные системы и сети
Форма обучения	Очная
Кафедра-разработчик	Радиоэлектроники и электроэнергетики
Выпускающая кафедра	Радиоэлектроники и электроэнергетики

Типовые задания для контрольной работы:

I (первые) задачи:

1. Определить при каких значениях x и y числа $z_1 = 2 - xi$ и $z_2 = y + 2i$ будут равными.
2. Сложить два комплексных числа $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 4-5i$.
3. Возвести в степень комплексные числа $(-2i)^7$, $\left(\frac{i}{2}\right)^8$
4. Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2+i$, $z_2 = \sqrt{3}+5i$.
5. Представить в тригонометрической форме число $z_3 = -3$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_3| = 3$.
6. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1-i$, $z_2 = 3+6i$.
7. Представить в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$. Найдем его модуль и аргумент.
8. Решить квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$
9. Дано комплексное число $z = \frac{1}{\sqrt{3}+i}$. Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме $a+bi$).
10. Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_1 = 3+\sqrt{3}i$, $z_2 = -2+4i$, $z_3 = -2-2i$, $z_4 = 1-\sqrt{3}i$.

II (вторые) задачи:

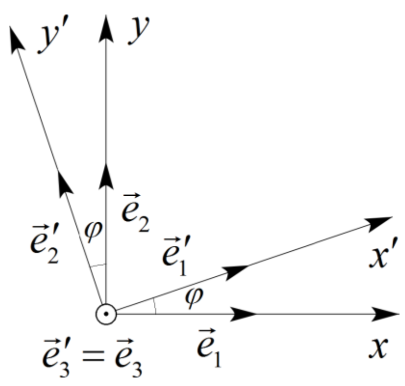
1. Найти и изобразить точками на комплексной плоскости все корни $\sqrt[6]{-1-\sqrt{3}i}$. Изобразить пунктиром окружность, на которой эти точки лежат. Построить штрих-пунктиром правильный многоугольник с вершинами в этих точках. Нанести сетку, отобразить оси линиями черного цвета, подписать их. Масштаб по осям сделать одинаковым.

2. Рассчитать напряжённость электрического поля $\vec{E}$, создаваемого диполем с дипольным моментом $\vec{d}$. Как известно, $\vec{E}=-\mathrm{grad}\varphi\left(\vec{r}\right)$, где $\varphi\left(\vec{r}\right)$ – распределение скалярного потенциала. В случае, когда источником электрического поля является диполь, $\varphi\left(\vec{r}\right)=\left(\vec{d},\vec{r}\right)/r^3$. Найдём $\mathrm{grad}\,\varphi\left(\vec{r}\right)$.

3. Пользуясь интегральным представлением оператора ∇, доказать равенство: $\int\limits_V\left[\vec{b},[\nabla,\vec{a}]\right]dV+\int\limits_V\left[[\vec{a},\nabla],\vec{b}\right]dV=-\oint\limits_S\left[[\vec{n},\vec{a}],\vec{b}\right]dS$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$ – постоянные векторы, $\vec{n}$ – орт нормали к поверхности.

4. Постройте матрицу поворота системы координат вокруг оси z на угол φ. По определению

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\left(\vec{e}_1{}', \vec{e}_1\right) & \cos\left(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2\right) & \cos\left(\vec{e}_1{}', \vec{e}_3\right) \\ \cos\left(\vec{e}_2{}', \vec{e}_1\right) & \cos\left(\vec{e}_2{}', \vec{e}_2\right) & \cos\left(\vec{e}_2{}', \vec{e}_3\right) \\ \cos\left(\vec{e}_3{}', \vec{e}_1\right) & \cos\left(\vec{e}_3{}', \vec{e}_2\right) & \cos\left(\vec{e}_3{}', \vec{e}_3\right) \end{pmatrix}.$$



При повороте вокруг оси z на угол φ (рис.) будет

$$\alpha_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Линия без потерь нагружена на емкостное сопротивление, численно равное волновому. $f = 100\,МГц$, $V = 3 \cdot 10^8$ м/с. В конце линии $U_2 = 200$ В. Найти $\dot{U}$ на расстоянии 1м от конца линии.

6. Проверить – лежат ли векторы $\bar{a}(1;\ 2;\ 3)$, $\bar{b}(4;\ 5;\ 6)$ и $\bar{c}(7;\ 8;\ 9)$ в одной плоскости, т.е. являются ли они компланарными**.**

7. Для векторов $\bar{a}(1;1;3), \bar{b}(-2;1;2), \bar{c}(2;0;5)$ вычислить смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

8. Для векторов $\bar{a}(1;1;3), \bar{b}(-2;1;2), \bar{c}(2;0;5)$ вычислить векторные произведения: 1) $\bar{a} \times \bar{b}$; 2) $\bar{a} \times \bar{c}$; 3) $\bar{c} \times \bar{b}$; 4) $\bar{a} \times (\bar{b} - \bar{c})$; 5) $(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b} - \bar{c})$

9. Пусть даны два вектора $\bar{a}(1;-2;3)$, $\bar{b}(2;-1;-1)$ требуется вычислить 1) $\bar{a} + (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{b}$, 2) $(\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{a} + \bar{b}$.

10. Вычислить объём пирамиды, если известны координаты её вершин: $A(2;1;4), B(1;2;3), C(6;0;2), D(3;3;3)$; 2) $A(2;1;5), B(5;0;3), C(4;0;8), D(6;-2;6)$.

III (третьи) задачи:

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа, его модуль, аргумент, найти сопряженное ему число: 1) $(5+4i)(3-2i^3)$; 2) $(1-i)^{13}$.

2. Найти и изобразить точками на комплексной плоскости все корни $\sqrt[6]{-1-\sqrt{3}i}$. Изобразить пунктиром окружность, на которой эти точки лежат. Построить штрих-пунктиром правильный многоугольник с вершинами в этих точках. Нанести сетку, отобразить оси линиями черного цвета, подписать их. Масштаб по осям сделать одинаковым.

3. Три компланарных вектора линейно зависимы. Действительно ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, если $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, т.е. $\vec{c} - \alpha\vec{a} - \beta\vec{b} = \vec{0}$?

4. Множество действительных квадратных матриц 2×2 четырёхмерно, а базисом могут служить четыре элемента этого множества: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определить скалярное произведение таких векторов – матриц 2×2.

5. Даны векторы $\vec{a} = 2i + 2j - k$ и $b = 2i - j + 3k$. Найти длины проекций этих векторов друг на друга.

6. Показать, что $((r-a)\cdot(r+a)) = 0$ – уравнение сферы. Здесь r – радиус-вектор, а a – постоянный вектор.

7. Доказать тождество Лагранжа: $\left([\vec{a}\times\vec{n}]\cdot[\vec{c}\times\vec{m}]\right) = \begin{vmatrix} (a\cdot c) & (a\cdot m) \\ (\vec{n}\cdot\vec{c}) & (\vec{n}\cdot\vec{m}) \end{vmatrix}$.

8. Пусть в некоторой декартовой системе координат известны компоненты тензора $P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Доказать, что сумма $\alpha \cdot A_{ij} + \beta \cdot B_{ij}$ представляет собой компоненты тензора второго ранга, если известно, что A_{ij} и B_{ij} – тензоры второго ранга, а и β – скаляры.

9. Найти потенциал точечного заряда в однородной анизотропной среде, характеризуемой тензором диэлектрической проницаемости ε_{ij}. В общем случае потенциал $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению: $\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = -4\pi q\delta(\vec{r})$, где $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака..

10. Доказать тождество $\operatorname{div}(\varphi \cdot A) = \varphi \operatorname{div} A + (A, \operatorname{grad}\varphi)$, где и A – соответственно скалярная и векторная функции координат.

<u>IV (четвёртые) задачи:</u>

1. Найти дивергенцию и ротор векторного поля A.

а). $A = [\vec{a}, \vec{r}]$; б). $A = \vec{c}\sin(k, \vec{r})$; в). $A = \vec{r}(\vec{a}, \vec{r})^n$;

2. Вычислить: а). $\operatorname{grad}(1/r)$; б). $\operatorname{div}(r/r)$; в). $\operatorname{rot}(r/r)$.

3. Найти напряженность электрического поля E, если распределение скалярного потенциала φ в пространстве имеет вид: а). $\varphi = -\frac{q}{x}$; б). $\varphi = Ae^{-\alpha x}$; в). $\varphi = -Az^2$.

4. Для тензора II-го ранга в трёхмерном пространстве доказать теорему Остроградского-Гаусса: $\int\limits_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} dV = \oint\limits_S T_{ik} dS_i$.

5. Вычислите для поля $\vec{B} = -\nabla\left(q/r\right)$.

а). поток вектора B через поверхность сферы единичного радиуса

б). интеграл по объему сферы от $\operatorname{div} B$

произвести прямое доказательство теоремы Остроградского-Гаусса.

6. Для тензора II-го ранга в трёхмерном пространстве доказать теорему Остроградского-Гаусса: $\int\limits_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} dV = \oint\limits_S T_{ik} dS_i$.(исходить из теоремы Остроградского-Гаусса для вектора $A_i = T_{ik} d_k$, где $\vec{d}$ – постоянный вектор.)

7. Доказать тождество $(\nabla, \vec{A})\vec{B} = \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A} + (\vec{A},\nabla)\vec{B}$, где $\vec{A}$ и $\vec{B}$ – векторные функции координат.

8. Найти матрицу C=3A-2B, где A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 13 & 11 \\ 2 & -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Найти изображение периодического импульса с периодом 2τ

$$f(t) = \begin{cases} \frac{h}{\tau} t & 0 \le t \le \tau \\ -\frac{h}{\tau}(t-\tau) & \tau < t < 2\tau \end{cases}$$

10. Найдем изображения по Лапласу тригонометрических и гиперболических синуса и косинуса.

$$e^t \sim \frac{1}{p-1}, \quad e^{-t} \sim \frac{1}{p+1}, \quad e^{it} \sim \frac{1}{p-i}, \quad e^{-it} \sim \frac{1}{p+i}$$

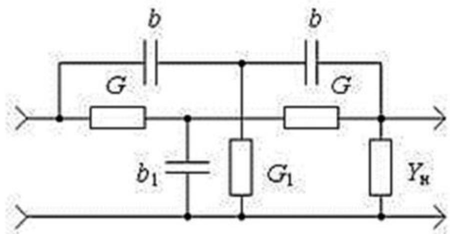
$$cht = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right) = \frac{p}{p^2-1}, \quad sht = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2-1}$$

V (пятые) задачи:

1. Найти вычеты функции $\frac{1}{z^2+1}$ во всех особых точках конечной плоскости. У функции два полюса первого порядка $z = i, z = -i$.

2. Записать в алгебраической и показательной формах выражение для полного комплексного сопротивления индуктивной катушки с параметрами $R_К$= 3 Ом; $L_К$= 0,0127 Гн, f = 50 Гц.

3. Найти параметры и передаточную функцию схемы двойного Т-образного моста, нагруженного на $Y_н$.



4. Линия без потерь длиной $l = \lambda/10$ разомкнута на конце. $Z_C = 200$ Ом, в начале линии $U_1 = 200$ В. Найти $\dot{I}$ в середине линии.

5. Рассмотреть падение волны напряжения, возникшей при коммутации в схеме предыдущей задачи, на резистор $R_H = 100$ Ом и определить обратные волны тока и напряжения, образующиеся при этом падении.

6. Показать, что векторное поле $\overline{F}$ является потенциальным и найти его потенциал
$\overline{F}(x;y;z) = (3x+yz)\overline{i} + (3y+xz)\overline{j} + (3z+xy)\overline{k}$.

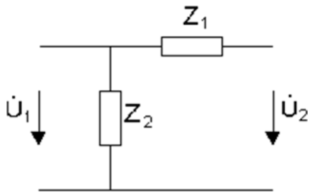
7. Определить активную, реактивную и полную мощности, если мгновенные значения тока и напряжения заданы уравнениями:
$u = 141\sin(314t + 60°),\ B;\ i = 7{,}07\sin(314t + 30°),\ A.$

8. Заданы графики изменения $u(t)$ и $i(t)$ (с амплитудами U_m=141В; I_m=2,82 А для участка электрической цепи. Записать функции в тригонометрической и комплексной формах, если f = 50 Гц. Определить полное сопротивление и угол сдвига фаз. Построить схему замещения цепи.

9. Вычислить определители:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} \qquad 2)\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad 3)\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

10. Определить A-параметры четырехполюсника схема которого представлена на рисунке.



Типовые вопросы к экзамену

1. Комплексные величины. Функции комплексной переменной. Понятие комплексного числа. Действительная и мнимая часть комплексного числа. Мнимая единица. Степень комплексного числа. Комплекс плоскость.

2. Сопряженные комплексные числа. Корень из комплексного числа и единицы. Операции с комплексными числами. Аналитическая функция. Криволинейный интеграл от функции комплексной переменной.

3. Теорема Коши. Ряд Тейлора, Лорана. Теорема о вычетах. Эквивалентный контур. Теорема о числе полюсов и нулей. Конформные отображения. Теорема Шварца-Кристоффеля.

4. Применение комплексных величин при расчете электрических цепей в синусоидальном режиме. Графическое изображение синусоидальной функции. Представление электрических величин с помощью комплексных чисел.

5. Комплексное полное сопротивление при последовательном и параллельном соединении. Метод комплексных амплитуд. Обобщение понятия комплексного полного сопротивления (импеданс).

6. Правила Кирхгофа и законы Ома в комплексной форме. Комплексный вектор. Векторная диаграмма для токов и напряжений в электрической цепи с комплексными величинами. Баланс мощностей.

7. Ряд Фурье. Интеграл Фурье. Разложение в ряд по ортогональным функциям. Метод Даламбера и метод Фурье. Разложение в ряд Фурье. Ряды с комплексными числами.

8. Графическое представление спектра частот. Распространение ряда Фурье на периодические функции. Вещественная форма интеграла Фурье.

9. Комплексная форма интеграла Фурье. Ряды с комплексными членами. Применение рядов к электрическим цепям. Преобразование Фурье, применение к электрическим цепям. Изучение диаграмм направленности

10. Скалярные и векторные величины. Ось и направление вращения вектора. Положительное направление трех векторов a, b, c. Угол между двумя векторами a и b.

11. Операции над векторами. Произведение вектора на скаляр. Сложение и вычитание векторов. Скалярное и векторное произведение. Смешанное произведение трех векторов.

12. Дифференциальные операции с векторами. Функции точек. Векторные интегралы. Приложения векторного исчисления к теории электромагнитного поля.

13. Силовые линии тока. Градиент сложной скалярной функции. Дивергенция и вихрь (ротор). Оператор Лапласа и Гамильтона. Общий случай векторного поля.

14. Электростатическое поле. Магнитное поле постоянных токов. Электромагнитное поле. Закон Фарадея. Закон Ампера.

15. Циркуляция и поток вектора. Теорема Остроградского-Гаусса. Уравнения Максвелла. Векторный потенциал магнитного поля, возбужденного током.

16. Системы ортогональных криволинейных координат в пространстве. Система цилиндрических и сферических координат. Система параболических и эллипсоидальных координат вращения.

17. Приложения к уравнениям Максвелла для электромагнитных колебаний и волн. Уравнения Максвелла в ортогональных криволинейных координатах.

18. Применение тензорного исчисления к исследованию электрических цепей. Тензорная алгебра. Тензорная плотность и тензорная емкость. Матричная форма формул преобразования координат.

19. Методы интегрирования дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.

20. Уравнение Бернулли и Лагранжа. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных. Уравнение Эйлера.

21. Интегрирование при помощи степенных рядов. Уравнения с частными производными. Частный интеграл неоднородного уравнения. Уравнение Лапласа и Пуассона.

22. Законы Ома в дифференциальной и интегральной форме. Закон Джоуля-Ленца, работа, электрическая энергия и мощность. Электромагнитные колебания в прямоугольной полости.

23. Применение специальных функций для расчётов в электротехнике и радиоэлектронике. Приложение гиперболических функций к расчёту длинных линий. Представление гамма-функции через интеграл Коши.

24. Теория вероятностей и законы распределения случайных величин. Случайная величина. Независимые события. Теорема умножения вероятностей. Несовместные события.