

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Косенок Сергей Михайлович  
Должность: ректор  
Дата подписания: 06.06.2024 06:44:13  
Уникальный программный ключ:  
e3a68f3eaa1e62674b54f4998099d3d6bfdcf836

## Оценочные материалы для промежуточной аттестации по дисциплине

### Функциональный анализ

Код, направление подготовки	01.03.02, Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль)	Прикладная математика и информатика
Форма обучения	Очная
Кафедра-разработчик	Кафедра прикладной математики
Выпускающая кафедра	Кафедра прикладной математики

### 5-й семестр

#### Типовые задания для контрольной работы

##### I вариант

1. Пусть  $\rho(x, y)$  – метрика на множестве  $X$ . Доказать, что метрикой также является функция:

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

2. Доказать, что в любом метрическом пространстве замыкание открытого шара  $[S_r(x_0)]$  лежит в замкнутом шаре  $\bar{S}_r(x_0)$ .

##### II вариант

1. Пусть  $\rho(x, y)$  – метрика на множестве  $X$ . Доказать, что метрикой также является функция:

$$\rho_1(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$$

2. Доказать, что в любом метрическом пространстве:  $0 \leq \text{diam} S_r(x_0) \leq 2r$ .

#### Типовые вопросы для зачета

1. Определение метрического пространства.
2. Примеры метрических пространств.
3. Классификация точек и множеств в метрических пространствах.
4. Свойства открытых и замкнутых множеств.
5. Определение предела последовательности точек метрического пространства.
6. Определение фундаментальной последовательности.
7. Определение полного метрического пространства.
8. Определение компактного пространства.
9. Вполне ограниченные множества и критерий компактности метрического пространства.
10. Теорема Бэра.
11. Теорема о пополнении метрического пространства.
12. Определение всюду плотного множества и сепарабельного пространства.
13. Определение топологии и топологического пространства.

14. Определение базы топологии.

## 6-й семестр

### Примеры типовых контрольных заданий

#### I вариант

1. Провести ортогонализацию системы  $1, t, t^2, t^3$  в пространстве  $H^1[-1, 1]$ .
2. Пусть  $x(t) \in H^1[a, b]$ ,  $y(t) \in C^1[a, b]$ . Доказать, что  $x(t)y(t) \in H^1[a, b]$ .

#### II вариант

1. Доказать, что система функций

$$1, \sin \frac{2\pi k(t-a)}{b-a}, \cos \frac{2\pi k(t-a)}{b-a}, k \in \mathbb{N}$$

ортогональна в пространстве  $H^1[a, b]$ .

2. Какие из функций  $x(t) = \operatorname{sgn}(t)$ ,  $y(t) = |t|$  принадлежат пространству  $H^1[-\pi, \pi]$ ?

### Типовые вопросы для экзамена

1. Понятие множества. Операции над множествами.
2. Эквивалентность. Мощность множеств.
3. Метрические пространства.
4. Классификация точек. Открытые и замкнутые множества.
5. Сходимость. Плотные множества.
6. Полные метрические пространства. Теорема Бэра.
7. Пополнение пространства.
8. Принцип сжимающих отображений.
9. Топологические пространства.
10. Компактность.
11. Линейные пространства.
12. Евклидовы пространства.
13. Нормированные пространства.
14. Гильбертово пространство.
15. Линейные функционалы на нормированных пространствах.
16. Сопряженное пространство.
17. Обобщенные функции.
18. Мера. Лебегово продолжение меры.
19. Измеримые функции и их свойства.
20. Интеграл Лебега.