

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Косенок Сергей Михайлович  
Должность: ректор  
Дата подписания: 18.06.2024 12:45:19  
Уникальный программный идентификатор:  
e3a68f3eaa1e62674b54f4998099d3d6bfdcf836

## Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине

### Интегральные уравнения и вариационное исчисление, 4 семестр

Код, направление подготовки	03.03.02
Направленность (профиль)	Цифровые технологии в геофизике
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Кафедра экспериментальной физики
Выпускающая кафедра	Кафедра экспериментальной физики

Типовые задания для контрольной работы:

1. Решить задачу вариационного исчисления:

$$J(y) = \int_0^{\pi} (y''^2 - y^2) dx \rightarrow \text{extr}; \quad y(0) = y'(0) = y(\pi) = y'(\pi) = 0.$$

2. Решить задачу вариационного исчисления:

$$J(y) = \int_0^1 e^x \left( y^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx \rightarrow \text{extr}; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = e.$$

3. Решить задачу вариационного исчисления:

$$J(y) = \int_0^1 (x+1) y''^2 dx \rightarrow \text{extr}; \quad y(0) = y'(0) = 0; \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 2.$$

4. Решить задачу вариационного исчисления:

$$J(y) = \int_0^1 e^y y'^2 dx \rightarrow \text{extr}; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = \ln 4.$$

5. Найти допустимые экстремали изопериметрической задачи:

$$\int_{-1}^1 y \sqrt{1+y'^2} dx \rightarrow \text{extr}; \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1+y'^2} dx = 1; \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

6. Среди кривых длины  $L = 10 \arcsin \frac{3}{5}$ , соединяющих точки А(-3,0) и В(3,0) и лежащих выше оси абсцисс, определить ту, которая вместе с отрезком АВ ограничивает наибольшую площадь.

7. Найти допустимые экстремали изопериметрической задачи:

$$\int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx \rightarrow \text{extr}; \quad \int_0^{\pi/2} y \sin x dx = 1; \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

8. Решить задачу на условный экстремум:

$$J(y, z) = \int_0^1 (y^2 + 2y'^2 + z'^2) dx,$$

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad y(1) = e + e^{-1}, \quad z(1) = 2e - e^{-1}, \quad y' - z = 0.$$

9. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений:

$$y(x) = \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{t^3}} y(t) dt + x^{3/2}$$

10. Найти итерированные ядра указанного ядра:

$$K(x, t) = x + \sin t, \quad a = -\pi, \quad b = \pi$$

11. Найти резольвенту ядра:

$$K(x, t) = xe^t; \quad a = -1, \quad b = 1.$$

12. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t \sin x y(t) dt + \cos x$$

13. Показать, что функция  $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$  является решением интегрального уравнения Вольтерры:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+x^2} dt.$$

14. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерры с ядром  $K(x, t) = 1$ .

15. Показать, что функция  $\varphi$  является решением интегрального уравнения Вольтерры:

$$\varphi(x) = xe^x; \quad \varphi(x) = e^x \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-t)\varphi(t) dt.$$

16. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерры с ядром  $K(x, t) = x - t$ .

*Типовые вопросы к зачету:*

Задание для показателя оценивания дескриптора «Знает»	Вид задания и формируемые компетенции
<p><i>Сформулируйте развернутые ответы на следующие теоретические вопросы (при необходимости продемонстрируйте вывод уравнений и доказательства теорем):</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Примеры задач вариационного исчисления.</li> <li>2. Определение функционала.</li> <li>3. Основные леммы вариационного исчисления.</li> <li>4. Уравнение Эйлера.</li> <li>5. Определение вариации.</li> <li>6. Варианты уравнения Эйлера для функций от различных аргументов.</li> <li>7. Уравнение Эйлера для случая нескольких функций.</li> <li>8. Примеры изопериметрических задач.</li> <li>9. Необходимые условия экстремума.</li> <li>10. Примеры проблем, приводящих к задачам на условный</li> </ol>	<p>- теоретический</p> <p>ОПК-1.1 ОПК-1.3</p>

<p>экстремум.</p> <p>11. Необходимые условия экстремума.</p> <p>12. Определение второй вариации</p> <p>13. Условия Лежандра</p> <p>14. Уравнение Якоби</p> <p>15. Определение вида интегрального уравнения.</p> <p>16. Примеры задач, приводящих к интегральным уравнениям.</p> <p>17. Классификация интегральных уравнений.</p> <p>18. Элементы функционального анализа: метрические, линейные, банаховы и гильбертовы пространства. Определения и примеры.</p> <p>19. Ограниченные операторы. Понятие нормы оператора. Примеры.</p> <p>20. Теорема о сжимающем отображении.</p> <p>21. Метод последовательных приближений</p> <p>22. Определение итерированного ядра.</p> <p>23. Метод итерированных ядер.</p> <p>24. Определение резольвенты.</p> <p>25. Определение и свойства вырожденного ядра.</p> <p>26. Метод решения уравнений с вырожденным ядром.</p> <p>27. Преобразование Лапласа и его свойства.</p> <p>28. Теорема о свёртке для преобразования Лапласа. Решение уравнений Вольтерра второго рода с помощью теоремы о свёртке.</p>	
--	--

Задание для показателя оценивания дескриптора «Умеет»	Вид задания и формируемые компетенции
<p>26. Простейшая задача классического вариационного исчисления.</p> <p>27. Привести пример задачи классического вариационного исчисления со старшими производными.</p> <p>28. Привести пример задачи классического вариационного исчисления с двумя степенями свободы.</p> <p>29. Привести пример задачи на условный экстремум.</p> <p>30. Решить изопериметрическую задачу.</p> <p>31. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом последовательных приближений.</p> <p>32. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом итерированных ядер.</p> <p>33. Найти итерированные ядра для заданного ядра.</p> <p>34. Найти резольвенту для заданного ядра.</p> <p>35. Решить интегральное уравнение Вольтерра методом последовательных приближений.</p>	<p>- практический</p> <p>ОПК-1.1 ОПК-1.3</p>

Задание для показателя оценивания дескриптора «Владеет»	Вид задания и формируемые компетенции
<p>36. Решить простейшую задачу классического вариационного исчисления.</p> <p>37. Решить задачу классического вариационного исчисления со старшими производными.</p> <p>38. Решить простейшую задачу классического вариационного</p>	<p>Практический</p> <p>ОПК-1.1 ОПК-1.3</p>

<p>исчисления с двумя степенями свободы.</p> <p>39. Решить задачу на условный экстремум.</p> <p>40. Решить изопериметрическую задачу.</p> <p>41. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом последовательным приближений.</p> <p>42. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода методом итерированных ядер.</p> <p>43. Найти итерированные ядра для заданного ядра.</p> <p>44. Найти резольвенту для заданного ядра.</p> <p>45. Решить интегральное уравнение Вольтерра методом последовательных приближений.</p> <p>46. Решить уравнение Вольтерра с применением теоремы о свёртке для преобразования Лапласа.</p>	
---	--

*Типовые практические задания к зачету:*

1. Найти решение вариационной задачи  $\delta J[x(\cdot)] = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(t_1) = x_1$ , где

$$J[x(\cdot)] = \int_0^{t_1} \left[ (1+t^2)(x')^2 + t^2 x x' + t x^2 \right] dt .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом (каким?) функционала  $J[x(\cdot)]$ .

2. Найти решение вариационной задачи  $\delta J[y(\cdot)] = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 1$ , где

$$J[y(\cdot)] = \int_0^{\pi} \left[ (y' + y)^2 + 2y \sin x \right] dx .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом (каким?) функционала  $J[y(\cdot)]$ .

3. Найти решение вариационной задачи  $\delta J[y(\cdot)] = 0$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = 1 - \ln 2$ , где

$$J[y(\cdot)] = \int_1^2 \left[ x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y \ln x}{x} \right] dx .$$

Реализуется ли экстремум функционала  $J[y(\cdot)]$  на полученном решении?

4. Найти решение вариационной задачи  $\delta J[z(\cdot)] = 0$ ,  $z(0) = 4/5$ ,  $z(\pi/2) = e^{\pi}$ , где

$$J[z(\cdot)] = \int_0^{\pi/2} \left[ (z')^2 + 4z^2 + 2z \cos x \right] dx .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом  $J[z(\cdot)]$ .

5. Найти решение вариационной задачи  $\delta J[y(\cdot)] = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(1/2) = 2$ , где

$$J[y(\cdot)] = \int_0^{1/2} \left[ \frac{(y')^2}{x^2 - 1} - \frac{2y^2}{(x^2 - 1)^2} \right] dx .$$

Реализуется ли экстремум функционала  $J[y(\cdot)]$  на полученном решении?

$$\delta J[z(\cdot)] = 0 \quad z(0) = 0 ,$$

6. Найти решение вариационной задачи,  $z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sinh^3(\pi/4) + \sinh\left(\frac{\pi}{4}\right)$ , где

$$J[z(\cdot)] = \int_0^{\pi/4} \left[ zz' \arctan x - (z')^2 + \frac{z^2}{2(1+x^2)} - 9z^2 + 16z \sinh x \right] dx .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом  $J[z(\cdot)]$ .

7. Найти решение вариационной задачи  $\delta J[z(\cdot)] = 0$ ,  $z(1) = -2$ ,  $z(3) = 2$ , где

$$J[z(\cdot)] = \int_1^3 \left[ 2\sqrt{x}(z')^2 + \frac{z^2}{x\sqrt{x}} - \frac{8z'}{x\sqrt{x}} \right] dx .$$

Проверить, является ли найденное решение экстремумом  $J[z(\cdot)]$ .

8. Найти решение вариационной задачи  $\delta J[y(\cdot)] = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = e^{-1}$ , где

$$J[y(\cdot)] = \int_0^1 \left[ \frac{(y')^2}{y^2} - xy' - y \right] dx .$$

Реализуется ли экстремум функционала  $J[y(\cdot)]$  на полученном решении?

9. Найти решение вариационной задачи  $\delta J[y(\cdot)] = 0$ ,  $y(1) = 3$ ,  $y(2) = 2$ , где

$$J[y(\cdot)] = \int_1^2 \left[ y'e^y + x^4(y')^3 \right] dx .$$

Реализуется ли экстремум функционала  $J[y(\cdot)]$  на полученном решении?

10. Найти условный экстремум функционала  $J[z(\cdot)] = \int_0^1 [2zz' + (z')^2] dx$ , если

$$z(0) = z(1) = 0, \text{ а связь имеет вид: } \int_0^1 [4xz' + zz'] dx = 4 .$$

11. Найти условный экстремум функционала  $J[z(\cdot)] = \int_0^1 [zz' + 2(z')^2] dx$ , если

$$z(0) = z(1) = 0, \text{ а связь имеет вид: } \int_0^1 [-8xz' + zz'] dx = 8 .$$

12. Найти условный экстремум функционала  $J[z(\cdot)] = \int_0^\pi [z^2 + (z')^2 + 2z \cos x] dx$ , если

$$z(0) = 2, z(\pi) = -2, \text{ а связь имеет вид: } \int_0^\pi z \cos x dx = \pi .$$

13. Найти условный экстремум функционала  $J[z(\cdot)] = \int_0^{\pi} [2z + 3z' + (z')^2] dx$ , если

$$z(0) = 0, z(\pi) = \pi^2, \text{ а связь имеет вид: } \int_0^{\pi} z \sin x dx = \pi^2 - 1.$$

14. Найти условный экстремум функционала  $J[z(\cdot)] = \int_0^1 [2xz + (z')^2] dx$ , если

$$z(0) = 0, z(1) = 3, \text{ а связь имеет вид: } \int_0^1 zx dx = 1.$$

15. Используя аксиомы гильбертова пространства, доказать неравенство Шварца:

$$\|\chi\| \|\psi\| \geq |(\chi, \psi)|.$$

16. Используя аксиомы гильбертова пространства, доказать неравенство Минковского:

$$\|\chi\| + \|\psi\| \geq \|\chi + \psi\|.$$

17. Доказать, что пространство  $\mathcal{L} = \left\{ \psi: \psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\}$  последовательностей образует метрическое пространство, если расстояние между любыми двумя элементами  $\psi, \chi \in \mathcal{L}$  задаётся функцией

$$\rho(\psi, \chi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|}.$$

Можно ли, сохранив метрическую функцию, превратить пространство  $\mathcal{L}$  в банахово (то есть в линейное нормированное пространство), определив в нём операции сложения и умножения на числа?

18. Пусть  $\mathcal{H}$  - гильбертово пространство и пусть  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$  - система попарно ортогональных векторов. Показать: а) что векторы этой системы линейно

независимы; б) что если  $\phi = \sum_1^n c_k \psi_k$  - произвольная суперпозиция этих векторов, то

$$\|\phi\|^2 = \sum_1^n |c_k|^2 \|\psi_k\|^2.$$

19. Постройте пример непрерывной функции, у которой первая и вторая производные непрерывны в некоторой точке, а третья имеет разрыв (первого или второго рода).

20. Рассмотрите оператор  $\hat{C}_f: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ ,  $(\hat{C}_f \psi)(x) = \psi(f(x))$ , где  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$  - заданная дифференцируемая монотонная функция с ограниченной производной. Покажите, что оператор  $\hat{C}_f$  - ограниченный, и найдите его норму. В пространстве  $C[0,1]$  использовать норму  $\|\dots\|_1$ .

21. Оператор «взвешенного сдвига»  $\hat{T}: \ell_2 \rightarrow \ell_2$  определяется согласно условию

$$\hat{T}\psi = \hat{T}(x_1, x_2, x_3, \dots) = (a_1 x_2, a_2 x_3, a_3 x_4, \dots),$$

где числа  $a_1, a_2, a_3, \dots$  - «веса». Найти условие, которому должны удовлетворять веса, чтобы оператор  $\hat{T}$  был ограниченным. Определить норму  $\hat{T}$ .

22. Пусть интегральный оператор  $\hat{A}: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$  имеет вид:  $(\hat{A}\psi)(x) = \int_0^x t\psi(t)dt$ .

Показать, что этот оператор ограничен, если в  $C[0,1]$  используется  $\sup$ -норма (то есть норма  $\|\cdot\|_\infty$ ), и сравнить  $\|\hat{A}\|$  с  $\|\hat{A}^2\|$ . Можно ли на основе полученного сравнения сделать вывод о сжимающем характере отображения, задаваемого оператором  $\hat{A}$ ?

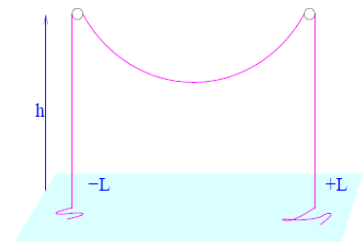
23. Доказать, что линейный оператор является ограниченным тогда и только тогда, когда он непрерывен.

24. Доказать, что если линейный оператор непрерывен в некоторой точке  $\psi_0$  банахового пространства, то он непрерывен и во всей области определения этого оператора.

25. Пусть интегральный оператор  $\hat{A}: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$  имеет вид:  $(\hat{A}\psi)(x) = \int_0^x \psi(t)dt$ .

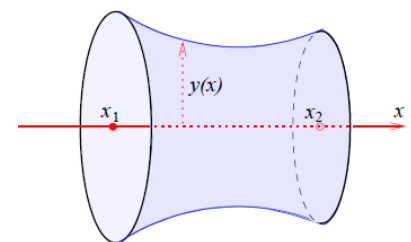
Показать, что если  $(\hat{A}\psi)(x) = 0, \forall x \in [0,1]$ , то  $\psi(x) = 0$ .

26. Найти форму «кривой прогиба» шнура, свободно перекинутого через два блока. Трение в блоках отсутствует. Указание: минимизируйте потенциальную энергию шнура. Обратите внимание на то, что натяжение в точках подвеса определяется весом свисающей части шнура и, следовательно, постоянно.



27. Мыльная плёнка натянута на два коаксиальных кольца радиусами  $y_1$  и  $y_2$ .

Свободная энергия  $F$  мыльной плёнки пропорциональна площади её поверхности:  $F = \sigma S$ ,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения. Принимая, что в положении равновесия свободная энергия минимальна, определить форму поверхности. Указание: эффектами гравитации пренебречь и использовать тот факт, что в этом случае плёнка принимает форму поверхности вращения.



28. Нерастяжимый шнур длины  $\ell$  закреплён на двух опорах в точках  $A_1$  и  $A_2$ , расположенных на одинаковой высоте. Расстояние  $A_1A_2 = L < \ell$ . Определить форму кривой.

29. Доказать, что ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве и обладающий всюду плотной областью определения, замыкаем.

30. Пусть  $\hat{A}$  - интегральный оператор Вольтерры,  $\hat{A}: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ,

$$(\hat{A}\psi)(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)\psi(t)dt + \Phi_0(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Функция  $\Phi_0(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , а функция  $K(x, t)$  - в квадрате  $[a, b] \times [a, b]$ .

Показать, что отображение, задаваемое таким оператором, будет сжимающим. Подсказка: используйте ограниченность ядра.

31. Рассмотрите последовательность функций  $\{x^n\}_{n=0}^{n=\infty}$ . Покажите, что эта последовательность не является сходящейся (к какой функции?) в пространстве  $C[0, 1]$  по  $\sup$ -норме, но сходится по норме  $\|\dots\|_1$ .

32. Рассмотрите в качестве линейного нормированного пространства вещественную плоскость  $\mathbb{E}_2$ . Укажите множество точек на этой плоскости, которые соответствуют «единичному шару»  $\|\psi\| \leq 1$ ,  $\psi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , для трёх вариантов норм:  $\|\dots\|_1$ ,  $\|\dots\|_2$  и  $\|\dots\|_\infty$ .

33. Рассмотрите последовательность функций  $\{f_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$  из  $C[0, 1]$ , определяемую согласно равенству:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Проверьте, что  $\|f_n\|_\infty = 1 \quad \forall n$ , в то время как  $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3n}} \rightarrow 0$ . Какой вывод на основании этого факта можно сделать о свойствах последовательностей функций в разных банаховых пространствах?

34. Найти решение интегрального уравнения:

$$f(x) = x^3 + \int_0^\pi \sin(x-t)f(t)dt.$$

35. Найти решение интегрального уравнения:

$$f(x) = x^2 + \int_0^\pi \cos(x-t)f(t)dt.$$

36. Решить систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \int_0^t y(\tau)d\tau, \\ y(t) = t + \int_0^t z(\tau)d\tau, \\ z(t) = 1 + \int_0^t x(\tau)d\tau. \end{cases}$$



37. Решить систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = t + \int_0^t y(\tau) d\tau, \\ y(t) = 1 + \int_0^t x(\tau) d\tau. \end{cases}$$

38. Найти решение уравнения Вольтерры первого рода:

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \ln(x/\tau) f(\tau) d\tau,$$

в котором  $\Phi_0(x)$  - заданная функция.

39. Найти решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\psi(x) = \chi(x) + \int_0^1 (xy^3 + x^3y)\psi(y) dy,$$

выразив его через моменты заданной функции  $\chi(x)$ .